88195

V

בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תש"ע סמסטר קיץ מועד א

מרצים: ד"ר גיל אריאל וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

כל הקבוצות בשאלה זו הן תת קבוצות של קבוצה נתונה X.

לכל $U,A,V \subseteq X$ נגדיר: $U|A|V := \left(U \cap A^c\right) \cup \left(V \cap A\right)$.

א. נתון ש:

$X = \mathbb{N}$, $U := \{a \in \mathbb{N} \mid 1 \leq a \leq 10\}$, $V := \{a \in \mathbb{N} \mid 5 \leq a \leq 15\}$ ו A קבוצת המספרים הזוגיים. רשמו את איברי הקבוצה - $U|A|V$.

ללא קשר לנתונים של סעיף א, ענו על הסעיפים הבאים:

ב. הוכיחו כי אם $U_1 \subseteq U_2, V_1 \subseteq V_2$ אז $U_1|A|V_1 \subseteq U_2 \cup V_2$.

ג. הוכיחו כי $U \cap V \subseteq U|A|V \subseteq U \cup V$.

ד. הוכיחו כי $U|A|V = V|A^c|U$.

ה. הוכיחו כי $\left(U|A|V\right) \cap A = V \cap A$

ו. יהיו $Q := U|A^c|V, P := U|A|V$ הוכיחו כי $P|A|Q = U, P|A^c|Q = V$.

רמז לסעיף ו: השתמשו בסעיפים ד,ה.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

$\mathbb{R}$ מסמן את קבוצת המספרים הממשיים. נגדיר יחס $\approx$ באופנים הבאים. קבע האם $\approx$ יחס שקילות.

א. מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $y \approx x$ אם $xy \geq 0$.
ב. מעל $\mathbb{R}$ נגדיר $y \approx x$ אם $xy > 0$.
ג. מעל $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ נגדיר $y \approx x$ אם $xy \geq 0$.
ד. מעל $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ נגדיר $y \approx x$ אם $xy > 0$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

מצאו ביטוי סגור עבור הנוסחה $a_n = 6a_{n-1} - 9a_{n-2} + 4$ עם תנאי התחלה $a_0 = 2$, $a_1 = 10$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

בידינו 8 נרות ב 4 צבעים (מכל צבע יש שני נרות). בכמה דרכים שונות, בהנחה שאין הבדל בין שני נרות מאותו צבע, ניתן לסדרם בשורה כך שלא יהיו שני נרות סמוכים מאותו צבע?
רמז : עקרון ההכלה וההדחה.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

נתונות שתי פונקציות מעל הממשיים $f,g:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$.
שתי פונקציות נקראות כמעט שוות, נסמן $f\sim g$, אם הן מקבלות את אותם הערכים, מלבד אולי במספר בן מנייה של נקודות

$$f\sim g \Leftrightarrow \exists U\subset\mathbb{R},|U|\le\aleph_0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus U, f(x)=g(x)$$

א. הוכיחו שזהו יחס שקילות.

נסמן את קבוצת מחלקות השקילות כ W.
נגדיר מכפלה בסקלר מעל W

$$c[f]=[cf].$$

ב. הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב (כלומר, אם $[f_1]=[f_2]$ אז $[cf_1]=[cf_2]$).

נגדיר חיבור וחיסור מעל W

$$[f]\pm[g]=[f\pm g].$$

ג. הוכיחו שהפעולה מוגדרת היטב (כלומר, אם $[f_1]=[f_2]$ וגם $[g_1]=[g_2]$ אז $[f_1+g_1]=[f_2+g_2]$).

נאמר שפונקציה היא כמעט חסומה אם היא חסומה, מלבד אולי במספר בן מניה של נקודות

$$\exists M>0,\exists U\subset\mathbb{R},|U|\le\aleph_0,\forall x\in\mathbb{R}\setminus U,|f(x)|\le M.$$

ד. דוגמה: הראו שהפונקציה הבאה אינה חסומה, אבל כן כמעט חסומה

$$g(x)=\begin{cases}x & x\in\mathbb{Q}\\ 1 & x\notin\mathbb{Q}\end{cases}$$

תהי $[f]\in W$. נאמר כי $[f]$ כמעט חסומה אם f כמעט חסומה.

ה. הסבירו מדוע תכונה זו מוגדרת היטב, כלומר, אם $[f_1]=[f_2]$ ו f_1 כמעט חסומה, אז גם f_2 כמעט חסומה.

נסמן ב V את אוסף מחלקות השקילות מ W הכמעט חסומות.

ו. הוכיחו שזהו מרחב לינארי (סגור תחת חיבור וכפל בסקלר).

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

יהי $G=(V,E)$ גרף סופי לא מכוון בו לכל המעגלים הפשוטים אורך זוגי. הוכיחו כי לכל המעגלים הסופיים הלא פשוטים ב G גם אורך זוגי.