



בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה למדעי המחשב 88-195 תש"ע סמסטר א מועד א

מרצים: ד"ר אלי בגנו ומר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות במירוט על 5 שאלות בדיוק, כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, ולא יבדקו.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	
7	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תזכורת: עבור $f : A \rightarrow B$ פונקציה כלשהיא, ועבור $C \subseteq A$ התמונה של C היא $f[C] = \{f(x) \mid x \in C\}$.

יהיו A, B קבוצות ותהי $f : A \rightarrow B$ פונקציה כלשהיא.
נגדיר יחס R על $P(A)$ ע"י: $(X, Y) \in R$ כאשר $f(X) \subseteq f(Y)$.

- א. הגדירו באופן מדוייק "יחס סדר על קבוצה". (כתבו את 3 התכונות שיחס סדר מקיים, הגדירו כל אחת מהן).
- ב. הראו ש R מקיים את כל התכונות של יחס סדר, פרט לאחת, הראו שאינו מקיים אותה.
- ג. מצאו דוגמא ל $f : A \rightarrow B$ כך ש R אינו יחס סדר. (הגדירו את A , את B ואת $f : A \rightarrow B$).
- ד. מצאו תנאי על f אשר קיומו מבטיח ש- R יהיה יחס סדר והוכיחו שאכן התנאי מספיק.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

א. במבחן במתמטיקה יש 4 שאלות באלגברה, 3 בגיאומטריה ו-3 בטריגונומטריה. מצא בכמה אופנים ניתן לסדר את השאלות במקרים:

- I. ללא הגבלה
- II. השאלות באלגברה ראשונות
- III. השאלות בטריגונומטריה אינן 3 האחרונות.
- IV. השאלות באלגברה סמוכות זו לזו וכך גם השאלות בגיאומטריה.

הערה: יש להניח, כמובן, שכל השאלות שונות זו מזו.

ב. כתוב הוכחה קומבינטורית לזהות $\binom{n}{r} \cdot \binom{r}{k} = \binom{n}{k} \cdot \binom{n-k}{n-r}$. הוכחה אלגברית תזכה

בסך של 3 נקודות.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

- יהיו $f: A \rightarrow B$ ו $g: V \rightarrow W$ פונקציות.
נגדיר $h: A \times V \rightarrow B \times W$ ע"י לכל $a \in A, v \in V$ $h(a, v) := (f(a), g(v))$.
- הוכח או הפרך: אם f, g חח"ע אז h חח"ע.
 - הוכח או הפרך: אם f על B ו g על W אז h היא על $B \times W$.
 - (ללא קשר לסעיפים א, ב) תהי X קבוצה. נגדיר יחס R באופן הבא:
(קיימת פונקציה חח"ע מ A על B) $\wedge A, B \in X \Leftrightarrow ARB$
הוכיחו כי יחס שקילות מעל X .

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

נתבונן בפונקציה המוגדרת ע"י $T(n) = 8T\left(\left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor\right) + n \log n$ לכל $n \geq 2$. $T(1) = 1$.

- א. מצא פונקציה פונקציה חיובית אסימפטוטית \mathcal{O} של $T(n)$ כד ש $T(n) = \mathcal{O}(g(n))$.
הוכח תשובתך (בכל דרך שתמצא).
- ב. תהי \mathcal{O} של $T(n)$ פונקציה המקבלת רק ערכים חיוביים. נניח ש $g(n) = \theta(n^2)$. הוכח שיש $c_1, c_2 > 0$ כך שלכל $n \geq 1$ טבעי מתקיים $c_1 n^2 \leq g(n) \leq c_2 n^2$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

א. נתבונן בסדרה הבאה המוגדרת באופן רקורסיבי:

$$a_0 = 7$$

$$a_n = a_{n-1} + n$$

הנוסחא המפורשת עבור הסדרה היא $a_n = \frac{n^2}{2} + \frac{n}{2} + 7$. הוכח זאת בשתי דרכים:

- 1 ע"י שימוש בטכניקה שנלמדה בכיתה לפתרון משוואה רקורסיבית לינארית.
- 2 באינדוקציה.

ב. מצא את סכום המספרים מ 1 עד 1000 שאינם כפולה של 3, אינם כפולה של 5 ואינם כפולה של 7. (רמז: משפט ההכלה וההדחה אינו יכול להזיק).

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

לפנינו כד וחבית. הכד מכיל שני כדורים לבנים ושבעה שחורים. החבית מכילה חמשה לבנים וששה שחורים. אנו מפילים מטבע. אם הוא נופל על "פאלי" אנו מוציאים כדור מהכד, אחרת אנו מוציאים כדור מהחבית.

- א. מהי ההסתברות לכך שהמטבע נפל על "פאלי", בהנחה שיצא כדור לבן?
- ב. האם המאורעות "יצא כדור לבן" ו"יצא כדור שחור" תלויים? הוכח תשובתך!

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 7

א. "בזיק" ו "יויו" מתווכחים בשאלה, האם נכון שלכל ארבע קבוצות (לאו דווקא שונות) A, B, C, D מתקיים: $(A - B) \times (C - D) = A \times C - B \times D$. רשות הדיבור נתונה להם:

בזיק:

1. התנאי $(x, y) \in (A - B) \times (C - D)$ מתקיים אם ורק אם $x \in A, x \notin B$ ו $y \in C, y \notin D$.
2. כלומר אם ורק אם $x \in A, y \in C$ ו $x \notin B, y \notin D$.
3. כלומר אם ורק אם $(x, y) \in A \times C$ ו $(x, y) \notin B \times D$.
4. כלומר אם ורק אם $(x, y) \in (A \times C) - (B \times D)$.
5. לכן $(A - B) \times (C - D) = A \times C - B \times D$.

יויו: לא בטוח שאני מבין מה עשית אבל יש לי דוגמא נגדית: קח $A = C = \{1, 2\}, B = D = \{2\}$.

הכרע, מי צודק? "בזיק" או "יויו". אם "בזיק" צודק, הראה מדוע הדוגמא הנגדית של "יויו" אינה נכונה. אחרת מצא היכן בדיוק נמצאת הטעות של "בזיק".

ב. יהיו A, B, C, D קבוצות. הוכח או הפרך: $P(A \times B) = P(A) \times P(B)$.

נספח: משפט האב

- יהיו $a, b \geq 1$ קבועים. תהי $f : N \rightarrow R$ פונקציה ותהי $T : N \rightarrow R$ פונקציה המוגדרת ע"י נוסחת הנסיגה $T(n) = aT(\frac{n}{b}) + f(n)$ (כאשר במקרה הצורך, אנו מבינים את $\frac{n}{b}$ כ $\lfloor \frac{n}{b} \rfloor$).
1. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש $f(n) = O(n^{\log_b a - \varepsilon})$ או $T(n) = \Theta(n^{\log_b a})$.
 2. אם $f(n) = O(n^{\log_b a})$ או $T(n) = \Theta(n^{\log_b a} \log_2 n)$.
 3. אם קיים קבוע $\varepsilon > 0$ כך ש $f(n) = \Omega(n^{\log_b a + \varepsilon})$ ואם קיים קבוע $c < 1$ וטבעי $n_0 \in N$ כך ש $af(\frac{n}{b}) \leq cf(n)$ לכל $n \geq n_0$ או $T(n) = \Theta(f(n))$.