שאלון סגור

בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ב סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$. תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא C–נחמדה אם לכל $x,y\in A$ מתקיים $x-y\in C$. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה C–נחמדה.

א. (2) הוכח שאם $0\notin C$ אז $A=\phi$.

ב. (3) תן דוגמה ל- $C\subseteq\mathbb{R}$ אינסופית ו- $\phi\neq A\subseteq\mathbb{R}$ שהיא C–נחמדה.

ג. (15) נניח ש- $0\in C$. הוכח שקיימת $B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- B קבוצה C–נחמדה ומקסימאלית ביחס להכלה.

ד. (בונוס 5) נניח ש- $C\neq\phi$ והיא בעצמה C–נחמדה. תהי $B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- B קבוצה C–נחמדה ומקסימאלית ביחס להכלה. הוכיחו ש- $|B|=|C|$.

הדרכה לסעיף ד

בנה פונקציה $f:B\to C$ באופן הבא: $f(x)=b-x$ עבור $b\in B$ כלשהו.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

א. (8)

תהיינה $h:B\to C, g:B\to C$ פונקציות כך ש $|B|\geq 2$ הוכח ש:

$f:C\to A$ חח"ע אם ורק אם לכל 2 פונקציות $h:B\to C, g:B\to C$ מתקיים

$g=h \Leftarrow f\circ g=f\circ h$.

ב. (8) תהי A קבוצה אינסופית, $|A|=a$. תהי $B\subseteq A^A$, B בת מניה. הוכח ש-

$|A^A\setminus B|=2^a$.

ג. (4) הוכח או הפרך: אם B קבוצה אינסופית אז $|B|<|B^{\mathbb{N}}|$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

א.תהי $(A,\leq)$ קבוצה סדורה היטב. לכל $a\in A$ נגדיר $s(a)=\{x\in A|x\leq a\wedge x\neq a\}$.

1. (7) תהי $B\subseteq A$ המקיימת: לכל $a\in A$, $s(a)\subseteq B \Rightarrow a\in B$. הוכח $A=B$.
2. (7) תהי $f:A\to A$ חח"ע, על ושומרת סדר (כלומר $\left(x\leq y\Rightarrow f(x)\leq f(y)\right)$ אז f היא פונקצית הזהות על A. רמז: סעיף 1 יכול לעזור.

ב. (6) תן דוגמה לקבוצה עם יחס סדר מלא כך ש $B\subseteq A$, לכל $s(a)\subseteq B \Rightarrow a\in B$ אבל $A\neq B$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

א. (10) בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים לבנים ו – 4 כדורים צבעוניים (ב 4 צבעים שונים) ל – 10 תאים שונים כך ש:

1. (3) בכל תא יהיה כדור אחד בדיוק.
2. (3) בכל תא יהיה כדור אחד לבן לכל היותר ואין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא.
3. (4) אין מגבלה על מספר הכדודים בכל תא.

ב. (10) נתונה קבוצה סופית A, $|A|=n$. חשב את

1. (3) מספר היחסים הדו-מקומיים על A.
2. (3) מספר היחסים הרפלקסיביים על A.
3. (4) מספר היחסים על A הסימטריים והאנטיסימטריים בו זמנית.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר $\varphi: A^B \to P(A)$ ע"י $\forall f \in A^B, \varphi(f) = A \setminus f[B]$.

א. (5) הוכח ש-$|A|<|B|$ אם ורק אם $\phi \notin im(\varphi)$.

ב. (5) נניח ש-B לא ריקה. הוכח ש-φ איננה על.

ג. (5) תן דוגמה לקבוצות A ו-B כך ש-φ חח"ע.

ד. (5) נגדיר יח"ש על A^B ע"י: לכל $f,g \in A^B$, $f \sim g \Leftrightarrow \varphi(f) = \varphi(g)$. אין צורך להוכיח שזהו יח"ש. נניח ש-A,B קבוצות סופיות וש-$|B| \leq |A|$. מצא את $|A^B/\sim|$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

א. (10) תהי B קבוצה אינסופית, נסמן $|B|=b$, ותהי $a \le b$ עוצמה. הוכח שקיימת חלוקה של B, נסמנה $\{C_i\}_{i\in I}$, כך שלכל $i \in I$ מתקיים $|C_i|=b$ וכן $|I|=a$.

ב. (10) הוכח שאם R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R : a\in A\}$ חלוקה של A.