

ועלית החשיבות מזהירות!
 נבחן שיהיה ברשותו חומרי
 עזר אסור. יתבסס בהערכתו
 יעשה בזהירות כדי להחזיקו
 לדואר רשמי.

מבחן במתמטיקה בדידה 1, 88-195

משך הבחינה שעתיים וחצי. השימוש בכל חומר עזר אסור.
 עליך לענות על 4 מתוך 5 השאלות הראשונות. שאלה 6 היא שאלת בonus.

שאלה 1

א. יהי R יחס שקילות על קבוצה A , תהי B קבוצה המכילה ממש את A . האם R יחס שקילות על B ? נמק!

ב. תהי \mathbb{N} קבוצת הטבעיים, נגדיר את היחס הבא על \mathbb{N} :
 $(a,b) \in R$ אם $a|b$. הראה ש- R יחס סדר חלקי מעל \mathbb{N} .

כעת, נגדיר יחס S על \mathbb{Z} כך: $(a,b) \in S$ אם $a|b$.
 האם S יחס סדר חלקי מעל \mathbb{Z} ? נמק!

שאלה 2

א. יהי R יחס שקילות על קבוצה A , נגדיר יחס S על $P(A)$ בצורה הבאה:

$(B,C) \in S$ אם $(b,c) \in R$ לכל $b \in B$ ולכל $c \in C$.

האם S יחס שקילות על $P(A)$? נמק תשובתך!

ב. יהיו A ו- R כמו בסעיף הקודם ויהי T יחס על $P(A)$ המוגדר בצורה הבאה:

$(B,C) \in T$ אם $(b,c) \in R$ ו- $c \in C$ כך ש- $(b,c) \in R$.

האם T יחס שקילות על $P(A)$? נמק תשובתך!

שאלה 3

א. תהי A קבוצה אינסופית המכילה קטעים זרים מציר ה- x מהי עוצמת A ?
 רמז: בכל קטע על הישר הממשי קיים מספר רציונלי.

ב. תהי $\Omega = \{A \mid A \text{ קבוצה בת מניה של ישרים במישור}\}$. הוכח שלא קיימת קבוצה $A \in \Omega$ כך ש:

$$\bigcup_{I \in A} I = \mathbb{R} \times \mathbb{R}$$

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית.

א. הוכח שעוצמת קבוצת כל הפונקציות מ- A לעצמה (הקבוצה A^A) גדולה ממש מעוצמת A .

ב. נסמן $F = \{f \mid f: A \rightarrow A \text{ חח"ע}\}$. הוכח $|A| < |F|$.

הדרכה:

1. סמן $T = \{B \mid B \subseteq A \text{ וגם } |B| = |A|\}$ והראה התאמה חח"ע בין T ל- F .

2. תהי $B_0 \subseteq A$ וסמן $|B_0| = b$, $S_b = \{B \mid B \subseteq A \text{ וגם } |B| = b\}$. הוכח ש: $|S_b| \leq |T|$ לכל

$b < |A|$ (חשוב על המשלים והשתמש בעובדה שאם C או D קבוצות אינסופיות אז

$$|C \cup D| = \max\{|C|, |D|\}$$

3. סמן $I = \{|B| : B \subseteq A\}$ ושים לב ש- $|I| \leq |A|$, $P(A) = \bigcup_{b \in I} S_b$ ולכן $|P(A)| \leq |I| \cdot |T|$.

(השתמש בעובדה שאם C או D קבוצות אינסופיות אז $|C \times D| = \max\{|C|, |D|\}$.)

שאלה 5

א. כמה תתי קבוצות שונות בגודל לפחות 3 יש לקבוצה עם 7 איברים?

ב. כמה מספרים שלמים חיוביים קטנים מ-1500 אינם מתחלקים ב-2 וב-7 וב-11?

שאלה 6

א. מצא נוסחא רקורסיבית הומוגנית מסדר 3 עם מקדמים קבועים לסדרה שנוסחתה הסגורה היא:

$$a_n = n^2$$

ב. האם ניתן למצוא נוסחא רקורסיבית הומוגנית מסדר 2 עם מקדמים קבועים לאותה הסדרה? נמק!

בהצלחה!!!