

מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון מבחן לדוגמא פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
5 השאלות הן שוות-משקל. יש לענות על כולן, כל שאלה בעמוד נפרד.
ניתן לסמן עמודים כ"טיוטה".
יש להסביר ולנמק בבירור את כל הפתרונות.

בהצלחה!

1. נסחו והוכיחו את משפט ארדש-סקרש על תת-סדרות מונוטוניות.

ניסוח: יהיו $m, n \geq 0$ שלמים. לכל סדרה של $m \cdot n + 1$ מספרים ממשיים שונים יש תת-סדרה עולה באורך $m+1$ או תת-סדרה יורדת באורך $n+1$.
הוכחה: (בעזרת עקרון שובך היונים) עיינו בסיכומי ההרצאות שבידיכם.

2. הוכיחו או הפריכו:

$$A \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) = \bigcup_{i \in I} (A \times B_i) \quad \text{א.}$$

הוכחה:

$$\begin{aligned} (x, y) \in A \times \left(\bigcup_{i \in I} B_i \right) &\Leftrightarrow x \in A \wedge y \in \bigcup_{i \in I} B_i \Leftrightarrow x \in A \wedge \exists i \in I (y \in B_i) \\ &\Leftrightarrow \exists i \in I (x \in A \wedge y \in B_i) \Leftrightarrow \exists i \in I ((x, y) \in A \times B_i) \\ &\Leftrightarrow (x, y) \in \bigcup_{i \in I} (A \times B_i) \end{aligned}$$

$$\text{ב. } \bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

הפרכה: נגדיר

$$A_n = \begin{cases} \{1\}, & n \text{ odd} \\ \emptyset, & n \text{ even} \end{cases}$$

אזי

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} \left(\bigcup_{i=n}^{\infty} A_i \right) = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{1\} = \{1\} \neq \emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \emptyset = \bigcup_{n=1}^{\infty} \left(\bigcap_{i=n}^{\infty} A_i \right)$$

(באופן כללי, אגף שמאל מכיל את כל האיברים הנמצאים באינסוף מהקבוצות A_n , ואילו אגף ימין מכיל את האיברים הנמצאים בכל הקבוצות A_n פרט למספר סופי מהן.)

3. תהיינה \mathbb{R} קבוצת המספרים הממשיים, \mathbb{Q} קבוצת המספרים הרציונליים.
 נגדיר על קבוצת הפונקציות $A = \mathbb{R}^{\mathbb{R}}$ יחס \sim ע"י:
 $f \sim g \Leftrightarrow \forall x \in \mathbb{R} (f(x) - g(x) \in \mathbb{Q})$
 א. הוכיחו: \sim הוא יחס שקילות על A .

הוכחה:
רפלקסיבי: לכל $f \in A$, $\forall x \in \mathbb{R} (f(x) - f(x) = 0 \in \mathbb{Q})$ ולכן $f \sim f$.
סימטרי: לכל $f, g \in A$, אם $\forall x \in \mathbb{R} (f(x) - g(x) \in \mathbb{Q})$ אז $\forall x \in \mathbb{R} (g(x) - f(x) \in \mathbb{Q})$.
טרנזיטיבי: לכל $f, g, h \in A$, אם $\forall x \in \mathbb{R} (f(x) - g(x) \in \mathbb{Q} \wedge g(x) - h(x) \in \mathbb{Q})$ אז $\forall x \in \mathbb{R} (f(x) - h(x) = (f(x) - g(x)) + (g(x) - h(x)) \in \mathbb{Q})$.

ב. הוכיחו שלכל מחלקות השקילות $[f]$ יש אותה עוצמה. מהי?

הוכחה: תהי $f \in A$. אזי, לכל $g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$, $f \sim g \Leftrightarrow f - g \in \mathbb{Q}^{\mathbb{R}}$. לפיכך
 $|\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}| = |\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}| = \aleph_0^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0} \geq 2^{\aleph_0}$.
 ומצד שני $2^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \cdot \aleph_0} = (2^{\aleph_0})^{\aleph_0} \leq \aleph_0^{\aleph_0}$.

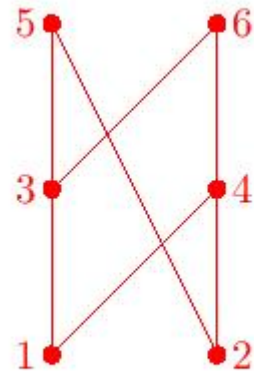
ג. מצאו את עוצמת קבוצת המנה A/\sim .

פתרון: כמובן, $2^{\aleph_0} = \aleph_0^{\aleph_0} = |A/\sim| \leq |A| = 2^{\aleph_0}$. מצד שני, קבוצת הפונקציות
 $B = \{f \in A \mid \forall x \in \mathbb{R} (f(x) \in \{0, \sqrt{2}\})\}$ היא בעלת עוצמה $|B| = 2^{\aleph_0}$ ואין בה זוג
 פונקציות שקולות: אם $f, g \in B$, $f \neq g$ אז $\exists x \in \mathbb{R} (|f(x) - g(x)| = \sqrt{2} \notin \mathbb{Q})$.
 לכן $|A/\sim| \geq 2^{\aleph_0}$ ובסה"כ $|A/\sim| = 2^{\aleph_0}$.
הערה: מידיעת העוצמות $|A| = 2^{\aleph_0}$, $|[f]| = 2^{\aleph_0}$ אי אפשר להסיק
 לגבי $|A/\sim|$.

4. יהי \triangleleft היחס על הקבוצה $P = \{1, \dots, 6\}$ המוגדר על ידי:
 $m \triangleleft n \Leftrightarrow (m = n \vee m + 2 \leq n)$
 א. הוכיחו: \triangleleft הוא יחס סדר חלקי על P .

הוכחה:
רפלקסיבי: לכל $m \in P$, $m = m$ ולכן $m \triangleleft m$.
אנטי-סימטרי: אם $m \triangleleft n$ וגם $n \triangleleft m$ אבל $m \neq n$, נקבל מההגדרה
 $(m + 2 \leq n) \wedge (n + 2 \leq m)$ וסתירה. לכן בהכרח $m = n$.
טרנזיטיבי: אם $m \triangleleft n$ וגם $n \triangleleft q$, ייתכנו ארבעה מקרים. בשנים מהם $m = n$
 ולכן $m \triangleleft q$, ובשנים האחרים $m + 2 \leq n$ ולכן $m + 2 \leq q$ ושוב $m \triangleleft q$.

ב. ציירו את דיאגרמת הסה של (P, \triangleleft) .



ג. רשמו שתי שרשראות מקסימליות באורכים שונים ב- P .

פתרון: למשל, $1 < 3 < 5$ ו- $2 < 5$.

5. מצאו כמה מהמספרים השלמים בין 1 ל-100 אינם מתחלקים באף אחד מהמספרים 3, 4, 5.

פתרון: נסמן

$$A = \{i \mid 1 \leq i \leq 100, 3 \mid i\}$$

$$B = \{i \mid 1 \leq i \leq 100, 4 \mid i\}$$

$$C = \{i \mid 1 \leq i \leq 100, 5 \mid i\}$$

מספר המספרים השלמים בין 1 ל- n המתחלקים במספר k הוא $\left\lfloor \frac{n}{k} \right\rfloor$,

כאשר $\lfloor x \rfloor := \max \{m \in \mathbb{Z} \mid m \leq x\}$ מסמן את החלק השלם של $x \in \mathbb{R}$. לפי עקרון ההכללה וההוצאה מן הכלל, מספר המספרים השלמים בין 1 ל-100 המתחלקים לפחות באחד מן המספרים 3, 4, 5, הוא, אם כן,

$$\begin{aligned} |A \cup B \cup C| &= (|A| + |B| + |C|) - (|A \cap B| + |A \cap C| + |B \cap C|) + |A \cap B \cap C| = \\ &= \left(\left\lfloor \frac{100}{3} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{5} \right\rfloor \right) - \left(\left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 4} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 5} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{100}{4 \cdot 5} \right\rfloor \right) + \left\lfloor \frac{100}{3 \cdot 4 \cdot 5} \right\rfloor = \\ &= (33 + 25 + 20) - (8 + 6 + 5) + 1 = 78 - 19 + 1 = 60 \end{aligned}$$

ולכן המספר המבוקש הוא $100 - 60 = 40$.