

בס"ד

**מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ה סמסטר קיץ מועד א**

מרצים: מר ארז שיינר, ד"ר יונתן בק וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

**הוראות הפעלה:**

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**.

המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא תבדקנה**.

שימו לב: יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
סה"כ	

**בהצלחה**

## שאלה 1

### סעיף א (16 נקודות)

תהיינה  $A, B, C, D$  קבוצות.

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i.  $|P(P(P(A))) \cap P(P(A))| \geq 2$

ii.  $P(A \cap B) = P(A) \cap P(B)$

iii.  $(A \cup B) \times (C \cup D) \subseteq (A \times C) \cup (B \times D)$

iv.  $(A \times B) \setminus (C \times D) = (A \setminus C) \times (B \setminus D)$

### סעיף ב (8 נקודות)

יהי  $E$  יחס שקילות על קבוצה  $A$ , ויהי  $F$  יחס שקילות על קבוצה  $B$ .

תהי  $G = \{((a_1, b_1), (a_2, b_2)) \mid (a_1, a_2) \in E, (b_1, b_2) \in F\}$

הוכיחו כי  $G$  הוא יחס שקילות על  $A \times B$ .

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

## שאלה 2

### סעיף א (16 נקודות)

נתונה הקבוצה  $A$  ואוסף תת-קבוצות לא ריקות שלה  $A_1, A_2, \dots, A_n$  השונות זו מזו נגדיר יחס  $R$  על  $A$  ע"י:

$$R = \{(x, y) \mid \exists i : (x \in A_i \wedge y \in A_i)\}$$

הוכיחו או הפריכו:

i. אם  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$  אז  $R$  רפלקסיבי.

ii. אם  $R$  רפלקסיבי אז  $\bigcup_{i=1}^n A_i = A$ .

iii. אם לכל  $1 \leq i < j \leq n$  מתקיים  $A_i \cap A_j = \emptyset$  אז  $R$  רפלקסיבי.

iv. אם  $R$  טרנזיטיבי אז לכל  $1 \leq i < j \leq n$  מתקיים:  $A_i \cap A_j = \emptyset$ .

### סעיף ב (12 נקודות)

תהיינה  $X, Y$  שתי קבוצות. תהי  $f : X \rightarrow Y$  פונקציה חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה  $F : P(X) \rightarrow P(Y)$  על ידי

$$F(A) = f[A] = \{f(a) \mid a \in A\}$$

i. הוכיחו ש  $F$  חח"ע.

ii. הוכיחו ש  $F$  על.

iii. מצאו את הפונקציה ההופכית  $F^{-1}$  והראו שאכן מתקיים

$$F^{-1} \circ F = I_{P(X)}, F \circ F^{-1} = I_{P(Y)}$$

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב



### שאלה 3

#### סעיף א (5 נקודות)

יהי  $G$  גרף פשוט. הוכיחו שיש ל- $G$  מספר זוגי של קודקודים מדרגה אי-זוגית. (אפס הינו מספר זוגי).

#### סעיף ב (15 נקודות)

יהי  $G$  גרף פשוט, ויהי  $v$  קודקוד ב- $G$  בעל דרגה אי זוגית. הוכיחו באמצעות אינדוקציה או בכל דרך אחרת, שקיים מסלול פשוט מהקודקוד  $v$  אל קודקוד אחר, בעל דרגה אי זוגית ב- $G$ .

(תזכורת: מסלול פשוט בין קודקודים שונים  $v_1, v_n$  הינו סדרה מהצורה  $v_1, v_2, \dots, v_n$  כך שכל שני קודקודים בסדרה הם שונים, ולכל שני קודקודים עוקבים ישנה צלע משותפת.)

דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_

**שאלה 4 (20 נק')**  
(הוכחת משפט מההרצאה)

הוכיחו שלכל קבוצה  $A$  מתקיים  $|A| < |P(A)|$



## שאלה 5

### סעיף א (11 נקודות)

הוכיחו כי לכל קבוצה אינסופית  $A$  קיימות שתי תתי-קבוצות זרות  $B, C \subseteq A$  כך ש

$$|A| = |B| = |C| \\ (רמז:  $|A \times A| = |A|$ )$$

### סעיף ב (12 נקודות)

נגדיר פונקציה  $T: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} \cup \{0\}$  על ידי  $T(n) = \max\{k \in \mathbb{N} \mid \exists m: n = m \cdot 2^k\}$ .

(במילים פשוטות  $T(n)$  היא החזקה של 2 בפירוק של  $n$  לגורמים ראשוניים.)

יהי יחס סדר חלקי  $R$  על  $\mathbb{N}$  המוגדר על ידי

$$kRm \Leftrightarrow (T(k) < T(m)) \vee [(T(k) = T(m)) \wedge (k \leq m)]$$

i. הוכיחו/הפריכו: יחס **מלא** (אין צורך להוכיח כי הוא יחס סדר חלקי).

ii. מצאו את החסם העליון של הקבוצה  $A = \{n^2 - n + 1 \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{2, 5, 11\}$ ,

הוכיחו תשובתכם.



דף נוסף לשאלה מספר \_\_\_\_\_