

מתמטיקה בדידה, 88-195

ד"ר אסף רינות, מר אחיה בר-און

מועד א', סמסטר א', תשע"ו

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

לפניכם שש שאלות. יש לענות על ארבע שאלות לכל היותר.¹

לכל השאלות משקל של 25 נקודות.

על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.²

1. נניח (A, R) ו- (B, S) קס"ח במובן החלש.

נניח בנוסף כי A, B לא ריקות, אך $A \cap B = \emptyset$.

נסמן $C := A \cup B$ ו- $T := R \cup S \cup (A \times B)$.

א. הוכיחו כי (C, T) קס"ח במובן החלש.

ב. הוכיחו כי B חסומה מלרע ב- (C, T) .

ג. הוכיחו כי אם (A, R) וגם (B, S) סדורות קווית, אז (C, T) סדורה קווית.

2. חשבון מונים:

א. הוכיחו כי לכל מונה אינסופי x מתקיים $3 \cdot x \leq 3 + x$ וכן $x \leq 3 + x$.

ההוכחה צריכה להתבסס על ההגדרות של חשבון מונים, ולכל אי-שוויון יש להציג פונקציה חח"ע.

ב. חשבו את $|\mathbb{Q}^{\mathbb{R}}|$.

ג. נתבונן בפונקציה $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ המוגדרת ע"י הכלל: $f(x) := \sup\{z \in \mathbb{Z} \mid z \leq x\}$.

נסמן ב- S את קבוצת נקודות השבת של f . חשבו את $|S|$ ו- $|\mathbb{R} \setminus S|$.

3. נגדיר קשר \square עבור תחשיב הפסוקים ע"י טבלת האמת הבאה:

A	B	$A \square B$
T	T	F
T	F	T
F	T	T
F	F	T

הגשימו שניים מהקשרים $\rightarrow, \wedge, \vee, \neg$, באמצעות הקשר \square .

4. נניח A, B קבוצות אינסופיות, ונתונה פונקציה $f: A \rightarrow B$.

נגדיר פונקציה $g: \mathcal{P}(B) \rightarrow \mathcal{P}(A)$ ע"י הכלל: $g(X) := f^{-1}[X]$. הוכיחו או הפריכו:

א. g מונוטונית עולה.

ב. g חח"ע.

ג. g על.

¹במידה ופתרתם יותר מארבע שאלות, ולא ציינתם אילו ארבע מהן לבדוק, ייבדקו הארבע הראשונות.
²להזכירכם, לא ניתן להוכיח באמצעות דוגמא. בכל מקרה בו תבקשו להפריך טענה, עליכם לספק דוגמא נגדית מפורשת.

5. נניח A קבוצה אינסופית. נסמן ב- \mathcal{F} את קבוצת כל יחסי השקילות מעל A .

א. הוכיחו: אם \mathcal{C} שרשרת לא ריקה ב- (\mathcal{F}, \subseteq) , אז $\bigcup \mathcal{C}$ יחס שקילות מעל A .

ב. נניח כי \mathcal{C} שרשרת מקסימלית ב- (\mathcal{F}, \subseteq) . נסמן $R := \bigcup \mathcal{C}$. חשבו את עוצמת קבוצת המנה $|A/R|$.

6. תורת הגרפים:

א. נניח $G = (V, E)$ גרף לא ריק שדרגת כל קודקודיו גדולה מ-1. הוכיחו כי ב- G יש מעגל.

ב. הוכיחו כי לכל n טבעי גדול מ-1, מספר הקשתות בגרף המלא K_n הוא $\frac{n(n-1)}{2}$.

בהצלחה!