תרגיל א'

2) א. $x\in P(A\cap B) \Leftrightarrow x\subseteq A\cap B \Leftrightarrow x\subseteq A \wedge x\subseteq B \Leftrightarrow x\in P(A) \wedge x\in P(B) \Leftrightarrow x\in P(A)\cap P(B)$

ב. $x\in P(A)\cup P(B) \Rightarrow x\in P(A) \vee x\in P(B) \Rightarrow x\subseteq A \vee x\subseteq B \Rightarrow x\subseteq A\cup B \Rightarrow x\in P(A\cup B)$

if (w.l.g) $A\subseteq B$ then

$x\in P(A\cup B) \Rightarrow x\subseteq A\cup B \Rightarrow x\subseteq B \Rightarrow x\in P(B) \Rightarrow x\in P(B)\cup P(A)$.

if $P(A\cup B)\subseteq P(A)\cup P(B)$, assume $A\not\subseteq B \wedge B\not\subseteq A \Rightarrow$
$\exists a\in A\setminus B \wedge \exists b\in B\setminus A \Rightarrow$
$\{a,b\}\subseteq A\cup B \Rightarrow \{a,b\}\in P(A\cup B)$ but
$\{a,b\}\not\subseteq A, B \Rightarrow \{a,b\}\notin P(A)\cup P(B)$. contradiction!

3) (X,R). נתון:

$\forall x\in X \quad xRx$

$\forall (a,b),(b,c)\in R \quad (a,c)\in R$

(X,S) מוגדר ע"י: $\forall a,b\in X$
$(a,b)\in S \Leftrightarrow (a,b)\in R \wedge (b,a)\in R$

ג. $\forall x\in X \quad xRx \wedge xRx \Rightarrow xSx$

$aSb \Rightarrow aRb \wedge bRa \Rightarrow bRa \wedge aRb \Rightarrow bSa$

$aSb \wedge bSc \Rightarrow \underline{aRb} \wedge \underline{bRa} \wedge \underline{bRc} \wedge \underline{cRb} \Rightarrow aRc \wedge cRb$

R טר' כי

$\Rightarrow aSc$.

S יחס ש"ק.

ד. צ"ל: $S=\mathrm{id}$ ⟺ R אנ"ס.

$\Rightarrow$: $xSy \Leftrightarrow xRy \wedge yRx \Leftrightarrow x=y$

כי R אנ"ס

$\Leftarrow$: R אנ"ס ולכן, לכל a,b:

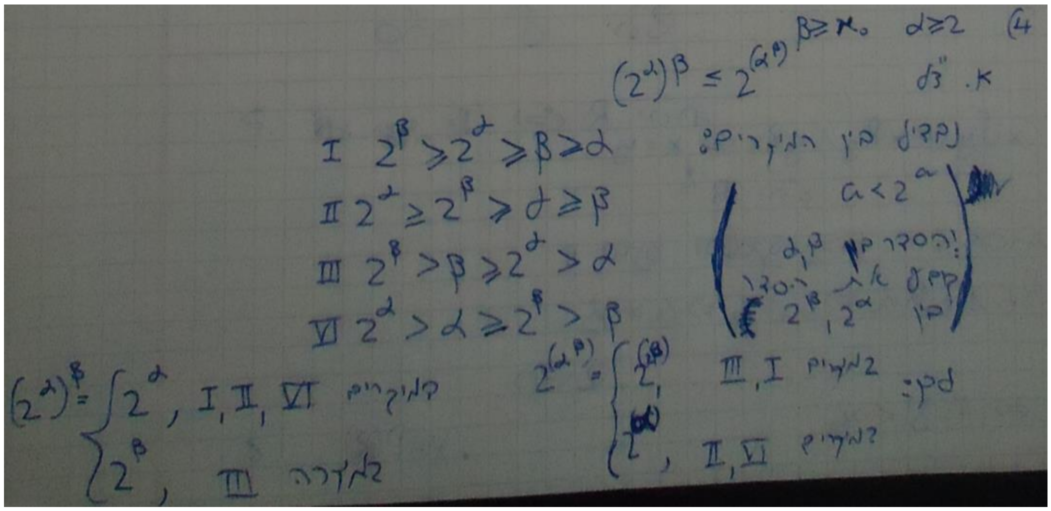
$aRb \wedge bRa \Rightarrow aSb \Rightarrow a=b$

כנדרש.

ה. $X=P(\mathbb{R})$.

$ARB \Leftrightarrow |A\setminus B|<\aleph_0$

תהי קבוצה A. נביט במחלקת השקילות [A]. קבוצה B שייכת אליה אם ורק אם A\B וגם B\A סופיות.
תהי F קבוצת תתי-הקבוצות מגודל סופי של הממשיים.
נביט בפונקציה בין [A] ל F X F שלוקחת כל קבוצה B לזוג הסודר (A\B,B\A) הפונקצייה הזאת היא חח"ע, ולכן עוצמת [A] איננה גדולה מעוצמת F X F כעת , ...+F=F1+F2 כאשר Fn היא קבוצת תתי הקבוצות מגודל n של הממשיים.
עוצמת כל Fn היא א ולכן הסכום של כולן (שהוא א0 כפול א) הוא גם כן א. לכן עוצמת F X F היא א.
אי-לכך, עוצמת [A] לא עולה על א. מצד שני, די קל להראות שהיא גם לא נופלת מא, ולכן היא א.



-3-

$(2^\alpha)^\beta \le 2^{(\alpha\beta)}$

לכן בכל מקרה.

ב. $\beta = \aleph_0$

נבחר $\aleph = \alpha$. אז:

$(2^\aleph)^{\aleph_0} = 2^\aleph$, because $2^\aleph > \aleph_0$

$2^{(\aleph \cdot \aleph_0)} = 2^\aleph$, because $\aleph > \aleph_0$

5) תהי A קס"ח. לכל שרשרת T ב-A נסתכל באוסף S

של כל השרשראות ב-A שמכילות את T:

$S_T = \{ C$ שרשרת ב-A $: T \subseteq C \subseteq A \}$

S_T קס"ח ביחס להכלה ולכן לפי עקרון המקס' של האוסדורף

ב-S_T C_T שרשרת מקסימלית, בפרט C_T מכילה את T.

לכן לכל T שרשרת ב-A, C_T מכילה את T.

1) $p \bar{\wedge} q := \neg(p \wedge q)$

א. $\neg p \equiv \neg p \vee F \equiv \neg(p \wedge T) \equiv p \bar{\wedge} T$

$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q) \equiv \neg p \bar{\wedge} \neg q \equiv (p \bar{\wedge} T) \bar{\wedge} (q \bar{\wedge} T)$

$p \wedge q \equiv \neg(\neg(p \wedge q)) \equiv \neg(p \bar{\wedge} q) \equiv (p \bar{\wedge} q) \bar{\wedge} T$

ב. $p \to q \equiv \neg p \vee q \equiv \neg(q \wedge \neg q) \equiv p \bar{\wedge} (\neg q) \equiv p \bar{\wedge} (q \bar{\wedge} T)$

פתרון פורמלי יותר ל-5:

יהיו $x1,x2,...,xn$ משתנים ופרדיקט כלשהו $p(x1,...,xn)$ מביטים בעמודה של p בטבלת האמת.

כעת, אפשר לרשום את p כאוסף של ביטויים שביניהם יש "או", כאשר כל ביטוי מתאים לשורה מסויימת בטבלה שהערך ש p מחזיר בה הוא "אמת,"

וכל ביטוי מכיל את כל המשתנים שביניהם יש "וגם" וכל משתנה מופיע כמות שהוא או עם "לא" לפניו בהתאם למה שהשורה מציינת. לכן אפשר לממש כל טבלת אמת ע"י "או", "וגם" ו"לא."

כעת, אם אפשר לממש את שלושת אלה ע"י הפעולה הבינארית שמוגדרת במבחן, אז אפשר לממש כל טבלת אמת בעזרת הפעולה הזאת.