מתמטיקה בדידה (88195) – פתרון בחינת סיום (מועד ב')
פרופ' רון עדין

משך הבחינה: שלוש שעות.
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על כל 5 השאלות, כל אחת בעמוד נפרד. כל השאלות שוות-משקל.
ניתן לסמן עמודים שלמים כ"טיוטה".
נא להסביר ולנמק היטב את כל הפתרונות.

בהצלחה!

שימו לב: הפתרונות מובאים בקיצור נמרץ.

.1

א. הגדירו: יחס שקילות, חלוקה (של קבוצה).
יחס שקילות: יחס רפלקסיבי, סימטרי וטרנזיטיבי (עם הסבר המושגים).
חלוקה: אוסף תת-קבוצות לא ריקות, זרות ומשלימות (כנ"ל).

ב. הוכיחו: כל יחס שקילות על קבוצה מגדיר חלוקה שלה, ולהיפך.
בהינתן יחס שקילות, החלוקה היא אוסף מחלקות השקילות. בהינתן חלוקה, היחס הוא השתייכות לאותו בלוק בחלוקה. צריך לבדוק את התקיימות התכונות.

.2 תהי $f:A\to B$ פונקציה כלשהי. נגדיר פונקציה $"f^{-1}":P(B)\to P(A)$ ע"י:

$$"f^{-1}"(\tilde{B}):=\{x\in A\,|\, f(x)\in\tilde{B}\}\qquad (\forall\tilde{B}\in P(B))$$

הוכיחו או הפריכו:

א. אם f חד-חד-ערכית אז $"f^{-1}"$ חד-חד-ערכית.
לא נכון. דוגמה: $f:\{1\}\to\{2,3\}$ המוגדרת ע"י $f(1):=2$ היא חח"ע, אך $"f^{-1}"(\varnothing)="f^{-1}"(\{3\})$.

ב. אם f חד-חד-ערכית אז $"f^{-1}"$ על.
נכון. אם f חד-חד-ערכית אז לכל קבוצה $\tilde{A}\in P(A)$ מתקיים שוויון $\tilde{A}="f^{-1}"("f"(\tilde{A}))$ (למרות שבדרך כלל יש רק הכלה $\tilde{A}\subseteq"f^{-1}"("f"(\tilde{A}))$), כי כל $x\in\tilde{A}$ הוא המקור ה<u>יחיד</u> של $f(x)\in"f"(\tilde{A})$.

ג. אם f על אז $"f^{-1}"$ חד-חד-ערכית.
נכון. אם $"f^{-1}"(\tilde{B}_1)="f^{-1}"(\tilde{B}_2)$ אך $\tilde{B}_1\ne\tilde{B}_2$, נניח בה"כ כי $y\in\tilde{B}_1\setminus\tilde{B}_2$. f על, ולכן קיים $x\in A$ כך ש- $y=f(x)$. אזי $x\in"f^{-1}"(\tilde{B}_1)$, $x\notin"f^{-1}"(\tilde{B}_2)$ וסתירה.

.3 תת-קבוצה A של קבוצת המספרים הממשיים $\mathbb{R}$ נקראת <u>חסרת ממוצעים</u> אם לא קיימים $x,y\in A$, $x\ne y$ כך שגם הממוצע החשבוני $(x+y)/2$ שייך ל- A.
הוכיחו שקיימת תת-קבוצה חסרת ממוצעים <u>מקסימלית</u> (לגבי הכלה), כלומר: תת-קבוצה חסרת ממוצעים $A\subseteq\mathbb{R}$ כך שאם $A\subseteq B\subseteq\mathbb{R}$ חסרת ממוצעים אז $A=B$.

שימוש בלמה של צורן. תהי P קבוצת כל הקבוצות חסרות הממוצעים $A\subseteq\mathbb{R}$. P סדורה חלקית ע"י הכלה, $P\neq\varnothing$ (כי $\varnothing\in P$). אם C שרשרת ב- P אז $A_C:=\bigcup_{A\in C}A$ היא תת-קבוצה חסרת ממוצעים של $\mathbb{R}$, כי אם $x,y,(x+y)/2\in A_C$ (כאשר $x\neq y$) אז קיימות $A_1,A_2,A_3\in C$ כך ש- $x\in A_1$, $y\in A_2$, $(x+y)/2\in A_3$. מכיוון ש- C שרשרת, בהכרח אחת מ- A_3,A_2,A_1 מכילה את שתי האחרות, ולכן מכילה את $x,y,(x+y)/2$, בסתירה לכך שהיא חסרת ממוצעים (כאיבר של C). לכן A_C חסם מלעיל ל- C ב- P. הוכחנו שלכל שרשרת ב- P יש חסם מלעיל, ולכן לפי הלמה של צורן יש ב- P איבר מקסימלי A_0. לפי הגדרתה, A_0 קבוצה חסרת ממוצעים מקסימלית לגבי הכלה.

4. תהיינה A, B קבוצות זרות ולא ריקות כך שקיימת פונקציה חד-חד-ערכית $f:A\cup B\to A$. הוכיחו או הפריכו:

א. A בהכרח אינסופית.

נכון. לפי הנתון $|A\cup B|\leq|A|$, ולכן אם A סופית אז גם $A\cup B$ סופית. עבור קבוצות סופיות זרות $|A\cup B|=|A|+|B|$ ולכן $|B|\leq 0$, כלומר $B=\varnothing$ וסתירה.

ב. B בהכרח אינסופית.

לא נכון. למשל: $A=\mathbb{N}$, $B=\{0\}$, $f:A\cup B\to A$ מוגדרת ע"י $f(n)=n+1$.

ג. $|B|\leq|A|$.

נכון. $|B|\leq|A\cup B|\leq|A|$, כשאי-השוויון השני הוא בגלל ש- f חח"ע.

5.

א. כמה מילים אפשר להרכיב ע"י שימוש בכל האותיות **א,א,א,ב,ב,ב,ג,ג,ד** ?

$$\frac{9!}{3!3!2!1!}$$

ב. בכמה מהמילים הנ"ל כל אות **ב** נמצאת מיד אחרי אות **א** ?

כאן יש בעצם רק 6 אותיות: אב,אב,אב,ג,ג,ד. <u>תשובה</u>: $\frac{6!}{3!2!1!}$

ג. מהו מספר הפונקציות החד-חד-ערכיות $f:\{1,\ldots,10\}\to\{1,\ldots,20\}$?

$$(20)_{10}=\frac{20!}{10!}$$