פתרון מועד ב

1.

א. יהי R יחס שקילות על X, נגדיר

$T=\{A\subseteq X \mid$ לכל $x\in X$, בקבוצה $A\cap[x]_R$ יש לכל היותר איבר אחד$\}$.

T לא ריקה כי $\phi\in T$ (או: לכל $x\in X$, $\{x\}\in T$). נגדיר יחס סדר על T ע"י $A_1\le A_2$ אם"ם $A_1\subseteq A_2$ לכל $A_1,A_2\in T$. תהי $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת לא ריקה ב- T. נסמן $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$, נוכיח $A\in T$. ואכן, יהי $x\in X$ ונניח בשלילה שבקבוצה $A\cap[x]_R$ יש יותר מאיבר אחד, יהיו $b,c\in A\cap[x]_R$ כאשר $b\neq c$. לכן קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $b\in A_\alpha$ ו $c\in A_\beta$. מאחר ו $\{A_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ניתן להניח בה"כ ש $A_\alpha\subseteq A_\beta$. לכן $b,c\in A_\beta\cap[x]_R$, $b\neq c$, בסתירה לכך ש- $A_\beta\in T$.

כמובן שלכל $\alpha\in I$, $A_\alpha\subseteq A$ כלומר $A_\alpha\le A$. לכן $A\in T$ מהווה חסם מלעיל לשרשרת (נדגיש שהחסם נמצא בתוך T).

לפי צורן קיים איבר מקסימלי ב- T, נסמנו S. כעת נוכיח ש- S חתך. ראשית נשים לב שמאחר ו- $S\in T$ מתקיים שלכל $x\in X$, הקבוצה $S\cap[x]_R$ בעלת לכל היותר איבר אחד.

נניח בשלילה ש- S לא חתך. לכן קיים $x\in X$ כך שהקבוצה $S\cap[x]_R$ ריקה. לכן $S\subset S\cup\{x\}$ (הכלה ממש) וקל לבדוק ש- $S\cup\{x\}\in T$, בסתירה למקסימליות S.

ב. מאחר ו- S חתך מתקיים $\bigcup_{x\in S}[x]_R=X$ והאיחוד משמאל הינו איחוד זר. לכן $a=|X|=|\bigcup_{x\in S}[x]_R|\le|S|\cdot b=\max\{|S|,b\}$. כלומר $a\le|S|$ (כי $b<a$) אבל מאחר ו- $S\subseteq X$, מתקיים $|S|\le a$ ולכן לפי ק.ש.ב. מתקיים $|S|=a$.

שאלה 4

תהי A קבוצה אינסופית.

א. (2) נסמן $T = \{X \subseteq A : |X| = |A|\}$, כלומר קבוצת תתי הקבוצות של A מעוצמה $|A|$. הוכיחו ש $|T| \le 2^{|A|}$.

ב. (8) הוכיחו שקיימות $B,C \subseteq A$ כך ש $B \cup C = A$, $B \cap C = \phi$ ו $|B| = |C| = |A|$. רמז: לכל עוצמה אינסופית a, מתקיים $a + a = a$ ולכן קיימות A_1, A_2 זרות...

ג.(4) נגדיר פונקציה $f : P(B) \to \{D \mid C \subseteq D \subseteq A\}$ (B ו- C מסעיף א) ע"י $f(X) = X \cup C$. הוכיחו ש f הפיכה.

ד. (2) הוכיחו שכל D כנ"ל היא מעוצמה $|A|$.

ה. (3) הוכיחו בעזרת סעיפים ג ו-ד ש $|T| \ge 2^{|A|}$.

ו. (1) הסיקו ש $|T| = 2^{|A|}$.

פתרון:

א. $T \subseteq P(A)$ לכן $|T| \le 2^{|A|}$.

ב. לכל עוצמה אינסופית a, מתקיים $a + a = a$ ולכן קיימות A_1, A_2 זרות כך ש- $|A_1| = |A_2| = a$ ו- $|A_1 \cup A_2| = a$. לכן קיימת $f : A_1 \cup A_2 \to A$ הפיכה. נסמן $B = f[A_1]$ ו- $C = f[A_2]$. מאחר ו- f הפיכה מתקיים $B \cup C = A$ (כי f על), $B \cap C = \phi$ (כי f חח"ע ו- A_1, A_2 זרות) ו- $|B| = |C| = a$ (כי f חח"ע ועל).

ג. הפונקציה $g : \{D \mid C \subseteq D \subseteq A\} \to P(B)$ המוגדרת ע"י $g(Y) = Y \setminus C$ הינה הפונקציה ההופכית ל- f (בידקו!). כמובן שבמקום למצוא את הפונקציה ההופכית ניתן היה להראות ש- f חח"ע ועל.

ד. $C \subseteq D \subseteq A$ לכן $|C| \le |D| \le |A|$ כלומר $a \le |D| \le a$.

ה. לפי ג, $|\{D \mid C \subseteq D \subseteq A\}| = |P(B)|$ וכמו כן $|P(B)| = 2^a$. מאחר ומתקיים, לפי ד, ש- $\{D \mid C \subseteq D \subseteq A\} \subseteq T$ אזי $|T| \ge 2^{|A|}$.

ו. לפי סעיפים א,ה ומשפט ק.ש.ב.

שאלה 5

א. תהי U קבוצה, ותהיינה $S,T\subseteq U$, נגדיר פונקציה $g:P(U)\to P(U)$ ע״י $g(A)=T\cap(S\cup A)$ לכל $A\in P(U)$.

1. (4) הוכיחו $g=g^2$. ($g^2=g\circ g$).

הוכח או הפרך:

2. (3) g חח״ע (לכל בחירה של $S,T\subseteq U$)
3. (3) g על. (לכל בחירה של $S,T\subseteq U$)

ב. (10) *נתונות פונקציות* $g:X\to X$ $f:X\to X$. *נתון ש:* $f\circ g\circ f$ *הפיכה. הוכיחו:*

1. f *הפיכה.*

2. g *הפיכה.* *רמז: הציגו את* g *כמכפלה של פונקציות הפיכות.*

פתרון:

א.
$$g^2(A)=g(g(A))=g(T\cap(S\cup A))=T\cap(S\cup(T\cap(S\cup A)))=$$
$$T\cap((S\cup T)\cap(S\cup A))=T\cap(S\cup T)\cap(S\cup A)=T\cap(S\cup A)=g(A)$$

2,3. נגדיר $U=\{1,2,3,4\}$, $T=S=\phi$ ואז לכל $A\in P(U)$ מתקיים $g(A)=\phi$. בפרט g איננה חח״ע ואיננה על.

ב.1. $f\circ g\circ f$ *הפיכה*, בפרט הפיכה משמאל ולכן קיימת פונקציה h כך ש- $h\circ f\circ g\circ f=Id$ ולכן f הפיכה משמאל. באופן דומה f הפיכה מימין ולכן f הפיכה.

2. לפי א, f הפיכה ולכן $g=f^{-1}\circ(f\circ g\circ f)\circ f^{-1}$ (נזכיר שהרכבת פונקציות הינה פעולה אסוציאטיבית) ולכן g הפיכה *כמכפלה של פונקציות הפיכות.*