

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 מרצים: מר שי סרוסי וד"ר אלי בגנו.
 סמסטר קיץ תשס"ח – מועד ב. חשון תשס"ח
 משך המבחן: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

במבחן שני חלקים. בחלק הראשון עליכם לענות על 2 שאלות בלבד מתוך 3. משקל כל שאלה 20 נקודות. שימו לב: ההוכחות בחלק זה חייבות להיות מתמטיות. אין לספר סיפורים.

בחלק השני, ובו בלבד, תוכלו לענות על כל השאלות ולצבור עד 76 נקודות.

כל התשובות בדפים. המחברת משמשת לטיוטה בלבד.

סימונים: $N = \{1,2,3,\dots\}$.

	1
	2
	3
	4
	5
	6
	7
	8

ציון: _____

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 1 (כל סעיף שווה 5 נקודות).

תהי A קבוצה לא ריקה כך ש $|A| \geq 2$.

נגדיר פונקציה:

$$f : A \times P(A) \rightarrow P(P(A))$$

ע"י

$$f(x, U) = \{V \subseteq U \mid x \in V\}$$

- א. האם f חח"ע? הוכיחו את תשובתכם.
ב. האם f על? הוכיחו את תשובתכם.
ג. האם $f(x, U \cap V) = f(x, U) \cap f(x, V)$?
אם כן – הוכיחו. אחרת – תנו דוגמא נגדית.
ד. האם $f(x, U \cup V) = f(x, U) \cup f(x, V)$?
אם כן – הוכיחו. אחרת – תנו דוגמא נגדית.

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 2

א. בכיתה ישנם 20 סטודנטים שפותרים מבחן. בכמה דרכים שונות יכול המרצה לחלק להם ציונים כך שהמוצע (בלי פקטור) יהיה 75? שימו לב: כל ציון שלם בין 0 ל-100 (כולל 0 ו-100) הוא חוקי. (הערה: אין צורך להגיע לתשובה סופית, מספיק לתת סכום של מספרים).

(15 נקודות).

ב. יהיו A, B, C קבוצות לא ריקות. $g : A \rightarrow B, f : B \rightarrow C$: הוכיחו כי אם $f \circ g$ על אז f על. (5 נקודות).

על שאלה זו עליכם לענות בצורה מסודרת ומפורטת בדף זה !!!

שאלה 3

א. הוכח: לכל A, B, C, D קבוצות: $(A - B) \cap (C - D) \subseteq (A \cap C) - (B \cap D)$. (5 נקודות).

ב. יהיו λ, κ עצמות, $2 \leq \kappa \leq 2^\lambda$, ו- λ אין סופית. הוכח ש $\kappa^\lambda = 2^\lambda$. (5 נקודות).

ג. תהי A קבוצה אין סופית. תהי B קבוצה בעלת עצמה גדולה מ-1 כך ש $B \subseteq P(A \times A)$.

נסמן $C = \{f \mid f : A \rightarrow B\}$. הוכח כי $|C| = |P(A)|$. (רמז: סעיף ב'). (5 נקודות).

חלק ב'

בחלק זה עליכם לענות לפי ההנחיות בגוף השאלה.

שאלה 4 (15 נקודות)

רשום נוסחת נסיגה עם תנאי התחלה מספיקים לתיאור מספר האפשרויות לחלק n סטודנטים לקבוצות שאינן ריקות (אין חשיבות לסדר בין הקבוצות) כך שבכל קבוצה יהיו לכל היותר 2 סטודנטים. אין צורך להסביר. רשום את הנוסחא ואת תנאי ההתחלה בלבד.

שאלה 5 (כל סעיף שווה 5 נקודות).

תהי A קבוצה כלשהי של מספרים ממשיים ויהי $a \in A$. יקרא **חוצץ** אם קיימת פונקציה חז"ע ועל מהקבוצה $\{b \in A \mid b < a\}$ אל הקבוצה $\{b \in A \mid b < a\}$.

א. מהי עוצמת קבוצת החוצצים של A אם A אינסופית וגם $A \subseteq \mathbb{N}$ (הינה קבוצת המספרים הטבעיים)? _____

ב. יהיו c ו- d שני מספרים ממשיים כאשר $d > c$. מהי קבוצת החוצצים של הקבוצה הבאה: $\{x \mid c < x < d\}$? _____

ג. תהי A קבוצה סופית כלשהי, מהי עוצמת קבוצת החוצצים של A ? (הפרד בין שני מקרים).

ד. אם $A \subseteq \mathbb{Z}$ (הינה קבוצת המספרים השלמים) ומספר החוצצים של A גדול מ-1 אז עוצמת קבוצת החוצצים של A היא _____.

שאלה 6 (כל סעיף שווה 8 נקודות)

נתון הלוח המשובץ הבא.

(5,0)	(5,1)	(5,2)	(5,3)	(5,4)	(5,5)
(4,0)	(4,1)	(4,2)	(4,3)	(4,4)	(4,5)
(3,0)	(3,1)	(3,2)	(3,3)	(3,4)	(3,5)
(2,0)	(2,1)	(2,2)	(2,3)	(2,4)	(2,5)
(1,0)	(1,1)	(1,2)	(1,3)	(1,4)	(1,5)
(0,0)	(0,1)	(0,2)	(0,3)	(0,4)	(0,5)

א) בכמה דרכים שונות ניתן להגיע מן הנקודה (0,0) אל הנקודה (5,5), אם בכל צעד מותר לנוע משבצת אחת ימינה או משבצת אחת למעלה?

32 (א)

$\frac{9!}{5!4!}$ (ב)

$\binom{10+2-1}{10}$ (ג)

252 (ד)

ב) בכמה דרכים שונות ניתן לבצע את המשימה מהסעיף הקודם אם אסור לעבור דרך אף אחת מהנקודות (2,1) ו-(3,4)?

42 (א)

174 (ב)

78 (ג)

37.5 (ד)

שאלה 7

1. (6 נקודות)

מבין הטענות שלהלן, טענה אחת בלבד מתקיימת לכל שתי קבוצות כלשהן A ו-B. סמנו טענה זו.

$$P(A) \times P(B) \subseteq P(A \times B) \quad (\text{א})$$

$$P(A) \times P(B) = P(A \times B) \quad (\text{ב})$$

$$(A \cap B, B - A) \in P(A) \times P(B) \quad (\text{ג})$$

$$P(A \cap B) \times P(A \cup B) \subseteq P(A) \times P(B) \quad (\text{ד})$$

2. על כל אחת מהשאלות הבאות ענה נכון/לא נכון. (כל סעיף שווה 3 נקודות).

יהי $G = (V, E)$ גרף.

(א) אם $\deg(v) \geq 2$ לכל $v \in V$ אז G קשיר. _____.

(ב) נניח ש $|V| = n, |E| = e$. אם $n \leq e$ אז יש מעגל ב G . _____.

(ג) יש גרף בן 6 קדקדים שדרגותיו 1,2,3,4,4,5. _____.

שאלה 8 (כל סעיף שווה 2.5 נקודות).

תהי A קבוצה בעלת יותר מאיבר אחד. יהי R יחס על $P(A)$ המוגדר באופן הבא:

$$R = \{(A_1, A_2) \mid A_2 \setminus A_1 \neq \emptyset, A_1 \setminus A_2 \neq \emptyset\}$$

ענה נכון או לא נכון.

א. R רפלקסיבי. _____.

ב. R סימטרי. _____.

ג. R טרנזיטיבי. _____.

ד. R אנטי סימטרי. _____.

בהצלחה!!!