

מבחן במתמטיקה בדידה 88-195 מרצה: ד"ר אלי בגנו. מתרגל: אפי כהן.
סמסטר קייץ תשס"ז – מועד ב. תשרי תשס"ח.
משך המבחן: שלש שעות.

הוראות הפעלה:

במבחן שני חלקים. בחלק הראשון עליכם לענות על שאלה 1 ועל עוד שאלה אחת בלבד מתוך שאלות 2 ו 3. משקל כל שאלה 20 נקודות. שימו לב: ההוכחות בחלק זה חייבות להיות מתמטיות. אין לספר סיפורים.

בחלק השני עליכם לצבור 60 נקודות. פעלו לפי ההנחיות בגוף השאלות. משקל כל שאלה 12 נקודות. (לכל סעיף אותו משקל).

כל הגרפים במבחן הם פשוטים: ללא לולאות וללא צלעות כפולות.

כל התשובות בדפים. המחברת משמשת לטיוטה בלבד.

סימונים: $N = \{1,2,3,\dots\}$.

חלק א'

בחלק זה עליכם לענות על שתי שאלות בדיוק.

שאלה 1 (חובה).

א. הוכח כי בגרף פשוט בעל n קדקדים יש שני קדקדים בעלי אותה דרגה.

הדרכה: עפ"י עקרון שובך היונים, אם $|A|=|B|$ אז $f: A \rightarrow B$ היא חד חד ערכית אם ורק אם היא על. הגדר "פונקציית דרגה" שתחומה הוא קבוצת הקדקדים.

ב. הוכח כי מספר הקדקדים בעלי דרגה אי זוגית בגרף סופי הוא זוגי. (רמז: עקרון לחיצת הידים).

שאלה 2

תהי A קבוצה בת n איברים. נתבונן בקבוצה $A^3 = A \times A \times A$.

א. כמה שלשות סדורות $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$ מקיימות: a_1, a_2, a_3 שונים זה מזה?

ב. כמה שלשות סדורות $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$ מקיימות: בדיוק שנים מתוך a_1, a_2, a_3 שונים זה מזה?

ג. כמה שלשות סדורות $(a_1, a_2, a_3) \in A^3$ מקיימות: שווים זה לזה?

ד. נגדיר יחס שקילות מעל A^3 ע"י $(a_1, a_2, a_3) = (b_1, b_2, b_3)$ כאשר

$\{a_1, a_2, a_3\} = \{b_1, b_2, b_3\}$. הוכח כי מספר מחלקות השקילות הוא $\frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.

ה. כ $f: A^3 \rightarrow B$ נקראת פונקציה סימטרית אם $f(a_1, a_2, a_3) = f(a_2, a_1, a_3) = \dots$

בהנחה ש $|A|=4, |B|=10$, כמה פונקציות סימטריות יש מ A^3 ל B ?

שאלה 3

נסמן ב a_n את מספר האפשרויות לסדר n סימנים בשורה כאשר כל סימן יכול להיות אות מתוך הקבוצה $\{ז, צ, פ, ל, ג, מ, ז, כ\}$ ואין אף שתי אותיות סופיות סמוכות. מצא נוסחת נסיגה ותנאי התחלה עבור a_n .

חלק ב'

בחלק זה עליכם לענות לפי ההנחיות בגוף השאלה. כל שאלה שווה 12 נקודות. לכל סעיף משקל זהה.

שאלה 4

בשאלה זו עליכם להקיף בעיגול את התשובה הנכונה.

$$2 \leq x_1 \leq 8$$

מספר הפתרונות בשלמים של המשוואה $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 20$ המקיימים

$$1 \leq x_2 \leq 10$$

$$0 \leq x_3 \leq 8$$

הוא:

כאן צריך להשלים 4 תשובות

שאלה 5

תת קבוצה A של N נקראת קוסופית אם משלימתה, A^c היא קבוצה סופית. למשל, $A = \{10, 11, 12, \dots\}$ היא קוסופית.

בשאלה זו עליכם להשלים את עצמת הקבוצה הנתונה:

א. קבוצת התת קבוצות הסופיות של N _____.

ב. קבוצת הקבוצות הקוסופיות של N _____.

- ג. קבוצת הקבוצות שאינן סופיות ואינן קו סופיות של N _____.
- ד. קבוצת הסדרות האין סופיות שרכיביהן לקוחים מתוך N _____.

שאלה 6

נסמן $A = \{\emptyset, \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

א. _____ $= A - \{\emptyset, \{\emptyset\}\}$

ב. _____ $= P(A)$

ג. _____ $= A \oplus \emptyset$

בסעיף הבא ענה נכון או לא נכון

ד. $(A \cap \{\emptyset\}) - \{\emptyset\} = \emptyset$

שאלה 7

- א. מספר האפשרויות לסדר את אותיות המילה יקירתי הוא: _____.
- ב. בכמה מהסידורים של סעיף א' יש 3 אותיות י' רצופות? _____.
- ג. בכמה מהסידורים של סעיף א' לא יופיעו בכלל אותיות י' רצופות? _____.
- ד. _____.

שאלה 8

נתונות פונקציות $f, g: \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ (\mathbb{Q} היא קבוצת כל המספרים הרציונליים).

ידוע כי לכל $x \in \mathbb{Q}$ מתקיים: $g(x) = f(3x + 2)$

א. אם f היא חד-חד-ערכית אז גם g היא חד-חד-ערכית.

ב. אם f היא פונקציה על אז גם g היא פונקציה על.

יהיו f, g פונקציות מ- \mathbb{N} ל- \mathbb{N} . נתון כי לכל n טבעי מתקיים:

$$(f \circ f)(n) = (f \circ g)(n) = n + 6$$

ג. f היא פונקציה חד-חד-ערכית.

ד. f היא על.

שאלה 9

ענו נכון או לא נכון בלבד.

א. היחס J המוגדר על N ע"י $(x, y) \in J$ כאשר קיים $n \in N \cup \{0\}$ כך ש $\frac{x}{y} = 2^n$ הוא

רפקלסיבי.

ב. היחס J המוגדר על N ע"י $(x, y) \in J$ כאשר קיים $n \in N \cup \{0\}$ כך ש $\frac{x}{y} = 2^n$ הוא

סימטרי.

ג. היחס L המוגדר ע"י $(x, y) \in L$ כאשר קיים $n \in N \cup \{0\}$ כך ש $\frac{x}{y} = 2^n$ או שקיים

$n \in N$ כך ש $\frac{x}{y} = 3^n$ הוא סימטרי.

ד. היחס L המוגדר ע"י $(x, y) \in L$ כאשר קיים $n \in N \cup \{0\}$ כך ש $\frac{x}{y} = 2^n$ או שקיים

$n \in N$ כך ש $\frac{x}{y} = 3^n$ הוא טרנזיטיבי.

בהצלחה