מתמטיקה בדידה (88195) – בחינת סיום (מועד א')
פרופ' סטוארט מרגוליס וד"ר נתן קלר

משך הבחינה: שעתיים וחצי (150 דקות).
אין להשתמש בשום חומר עזר, כולל מחשבון.
יש לענות על 4 מתוך 5 השאלות. אם פתרתם את כל השאלות – נא לציין 4 שאלות לבדיקה, אחרת תיבדקנה 4 הראשונות. כל השאלות שוות-משקל.
נא להסביר ולנמק בבירור את הפתרונות. ניתן לסמן עמודים כטיוטה.

בהצלחה!

1. א. בטא באמצעות הקשרים $\wedge ,\neg$ בלבד את הביטוי: $(p\vee\neg q)\to\neg r$.

ב. תהיינה A,B קבוצות. הוכח כי $(A\cup B)\setminus B=A$ מתקיים אם ורק אם $A\cap B=\phi$.

פיתרון:

$$(p\vee\neg q)\to\neg r=\neg(p\vee\neg q)\vee\neg r=\neg((p\vee\neg q)\wedge r)=\neg(\neg(\neg p\wedge q)\wedge r)$$

$$(A\cup B)\setminus B=(A\setminus B)\cup(B\setminus B)=A\setminus B=A\setminus(A\cap B)$$

כעת, אם $A\cap B=\phi$ אז $A\setminus(A\cap B)=A\setminus\phi=A$. אחרת קיים $a\in A\cap B$, ואז $a\in A$ אבל $a\notin A\setminus(A\cap B)$ ולכן אין שוויון בין הקבוצות.

2. תהיינה $f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ו- $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ פונקציות כך שמתקיים $g\circ f=h$ כאשר $h(n)=2n$ לכל $n\in\mathbb{N}$. הוכח או הפרך:

א. f הינה פונקציה חח"ע בהכרח.

ב. g הינה פונקציה חח"ע בהכרח.

פיתרון:

$h(n)=2n$ היא חח"ע ולכן f חייבת להיות חח"ע.

g לא חייבת להיות חח"ע. דוגמא נגדית: $f(n)=4n$ ו $g(n)=\left\lceil\frac{n}{2}\right\rceil$ (הסוגריים מייצגים עיגול כלפי מעלה).

3. יהי $\sim$ היחס על $P(\mathbb{N})$ המוגדר ע"י: $A\sim B$ אם ורק אם ההפרש הסימטרי $A\Delta B$ הוא קבוצה סופית.

א. הוכח כי היחס $\sim$ הוא יחס שקילות על $P(\mathbb{N})$.

ב. הוכח כי כל מחלקת שקילות של היחס $\sim$ היא בת מניה.

ג. מצא את עוצמת קבוצת מחלקות השקילות של היחס $\sim$.

פיתרון: $A\Delta A=\phi$ ולכן $A\sim A$. (רפלקסיביות)

$A\Delta B=(A\setminus B)\cup(B\setminus A)=B\Delta A$, לכן $A\sim B$ אם ורק אם $B\sim A$. (סימטריות)

אם $A\sim B$ וגם $B\sim C$ אז $A\Delta B$ ו $B\Delta C$ סופיות. $A\Delta C=(A\setminus C)\cup(C\setminus A)$.

כעת, $A\setminus C\subseteq(A\setminus B)\cup(B\setminus C)\subseteq A\Delta B\cup B\Delta C$, ולכן $A\setminus C$ סופית. באופן דומה גם $C\setminus A$ סופית, ולכן $A\Delta C$ סופית, ומתקיים $A\sim C$. (טרנזיטיביות)

נביט במחלקת שקילות $[A]$. כל קבוצה במחלקת השקילות מתקבלת ע"י הוספת מספר סופי של איברים לA ומחיקת מספר סופי של איברים בA. נבנה פונקציה $f:[A]\to PF(\square)$ כאשר $PF(\square)$ היא קבוצת תת-הקבוצות הסופיות של $\square$, שלוקחת כל קבוצה $B\in[A]$ ל$\{a:a\in B\setminus A\}\cup\{-a:a\in A\setminus B\}$. הפונקציה הזאת היא חח"ע, משום ש$B=A\setminus\{-a:a\in f(B)\wedge a<0\}\cup\{a:a\in f(B)\wedge a>0\}$.

לכן $|[A]|\le|PF(\square)|$. הקבוצה $PF(\square)$ היא איחוד הקבוצה שמכילה את הקבוצה הריקה עם קבוצת תת-הקבוצות עם איבר אחד עם קבוצת תת-הקבוצות עם שני איברים ואילך, ולכן גודלה הוא $1+\aleph_0+\aleph_0\cdot\aleph_0+\ldots=1+\aleph_0+\aleph_0+\ldots=\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, ולכן $|[A]|\le\aleph_0$.

מצד שני, אם A קבוצה סופית אז ישנם אינסוף איברים שאפשר להוסיף לה, ולכן $|[A]|=\aleph_0$. באופן דומה, אם A אינסופית אז יש מספר אינסופי של איברים שאפשר למחוק ממנה ולכן $|[A]|=\aleph_0$.

4. א. הוכח כי כל קבוצה אינסופית ניתנת להצגה כאיחוד (זר) של קבוצות בנות מניה.

ב. הוכח כי לכל עוצמה אינסופית a מתקיים $a+a=a$.

פיתרון: תהי A קבוצה אינסופית. נביט בקבוצות של תתי-קבוצות זרות של A מעוצמה $\aleph_0$ עם יחס ההכלה. תהי שרשרת של קבוצות כאלה. $P=\bigcup_{i\in I}P_i$ אף היא קבוצה של תתי-קבוצות זרות מעוצמה $\aleph_0$. לכן לפי הלמה של צורן ישנה קבוצה Q של תתי-קבוצות של A מעוצמה $\aleph_0$ שהיא מקסימאלית ביחס להכלה. אם $A\setminus\bigcup_{B\in Q}B$ אינסופית אזי אפשר לבחור לה תת-קבוצה מעוצמה $\aleph_0$ ואז להוסיף אותה כאיבר לQ וזה סותר את המקסימאליות של Q. לכן $A\setminus\bigcup_{B\in Q}B$ סופית, ולכן אפשר להוסיף את איבריה לאחת מהקבוצות בQ, ואז Q הופכת לחלוקה של A לקבוצות מעוצמה $\aleph_0$.

אנחנו יודעים ש$\aleph_0+\aleph_0=\aleph_0$ בגלל שעוצמת הזוגיים ועוד עוצמת האי-זוגיים שווה לעוצמת השלמים, וכולם מעוצמה $\aleph_0$. כעת, לA יש חלוקה לתתי-קבוצות מעוצמה $\aleph_0$. כל תת-קבוצה כזאת מתחלקת בהתאם לשתי תתי-קבוצות מעוצמה $\aleph_0$, ואז אפשר לבחור איבר אחד מכל זוג כזה ולאחד אותם חזרה לקבוצה מעוצמה $|A|$ ובמקביל לעשות את אותו הדבר עם האיברים השניים בזוגות.

5. בקורס שלנו 50 סטודנטים. ידוע כי:

40 מתוכם הבינו את החומר בנושא "עוצמות".

40 מתוכם הבינו את החומר בנושא "הלמה של צורן".

40 מתוכם הבינו את החומר בנושא "קומבינטוריקה".

34 מתוכם הבינו את החומר בנושאים "עוצמות" ו"הלמה של צורן".

34 מתוכם הבינו את החומר בנושאים "עוצמות" ו"קומבינטוריקה".

34 מתוכם הבינו את החומר בנושאים "הלמה של צורן" ו"קומבינטוריקה".

א. הוכח כי קיים לפחות סטודנט אחד שהבין את החומר בכל שלושת הנושאים.

ב. בהנחה שקיימים בדיוק 4 סטודנטים שלא הבינו את החומר באף אחד מהנושאים, חשב כמה סטודנטים הבינו את החומר בכל שלושת הנושאים.

פיתרון: מספר הסטודנטים שהבינו משהו n שווה

ל $40+40+40-34-34-34+k=18+k$ כאשר k הוא מספר הסטודנטים שהבינו הכל.

אולם, מספר הסטודנטים שהבינו משהו לא יכול להיות נמוך ממספר הסטודנטים שהבינו "עוצמות",

לכן $k+18\geq 40$, משמע $k\geq 22$.

אם כמות הסטודנטים שלא הבינו כלום שווה ל4 אז אלה שהבינו משהו הם 46, ואז $k+18=46$,

ולכן $k=28$.