בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ב סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם. אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תהי $C\subseteq\mathbb{R}$. תת קבוצה $A\subseteq\mathbb{R}$ תקרא C–נחמדה אם לכל $x,y\in A$ מתקיים $x-y\in C$. תהי $A\subseteq\mathbb{R}$ קבוצה C–נחמדה.

א. (2) הוכח שאם $0\notin C$ אז $A=\phi$.

ב. (3) תן דוגמא ל- $\phi\neq C\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- $\phi\neq A\subseteq\mathbb{R}$ היא C–נחמדה.

ג. (15) נניח ש- $0\in C$. הוכח שקיימת $B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- B קבוצה C–נחמדה ומקסימלית ביחס להכלה.

ד. (בונוס 5) נניח ש- $C\neq\phi$ והיא בעצמה C–נחמדה. תהי $B\subseteq\mathbb{R}$ כך ש- B קבוצה C–נחמדה ומקסימלית ביחס להכלה. הוכיחו ש- $|B|=|C|$.

הדרכה לסעיף ד

בנה פונקציה $f:B\to C$ באופן הבא: $f(x)=b-x$ עבור $b\in B$ כלשהו.

פתרון

א. אם $x\in A$ אז $0=x-x\in C$ אבל $0\notin C$ ולכן $A=\varnothing$.

ב. $A=C=\{0\}$.

ג. נגדיר קבוצה $\Omega=\{B\subseteq\mathbb{R}|$ נחמדה - C $B\}$ ונוכיח שיש איבר מקסימאלי ב Ω.

Ω לא ריקה מכיוון שהקבוצה $B=\{1\}$ - C נחמדה כי נתון ש $0\in C$.

נגדיר יחס סדר על Ω באופן הבא: $B_1\subseteq B_2\Leftrightarrow B_1\leq B_2$ (מההרצאה אנחנו יודעים שזהו יחס סדר חלקי). יהי $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת לא ריקה ב Ω. נוכיח שלשרשרת יש חסם מלעיל ב Ω.

נסמן $B=\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$ ונוכיח ש B חסם מלעיל ב Ω.

נוכיח תחילה ש $B\in\Omega$ ז"א צ"ל ש B קבוצה C - נחמדה. יהיו $x,y\in B$ נוכיח ש $x-y\in C$. מכיוון ש $x,y\in B$ אז $x,y\in\bigcup_{\alpha\in I}B_\alpha$ על פי הגדרת האיחוד קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $x\in B_\alpha$ ו $y\in B_\beta$ מכיוון ש $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב Ω ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $B_\alpha\subseteq B_\beta$ ומכיוון ש $x\in B_\alpha$ נקבל ש $x\in B_\beta$. $B_\beta\in\Omega$ ובנוסף $x,y\in B_\beta$ ולכן $x-y\in C$ ז"א $B\in\Omega$. על פי הגדרת האיחוד נקבל שלכל $\alpha\in I$ $B_\alpha\subseteq A$ ולכן B חסם מלעיל ב Ω לשרשרת $\{B_\alpha\}_{\alpha\in I}$ ועל פי הלמה של צורן קיימת קבוצה C - נחמדה מקסימאלית ביחס להכלה.

ד. מכיוון שהקבוצה C היא C - נחמדה נקבל שלכל $x,y\in C$ $x-y\in C$.

מכיוון ש $C\neq\varnothing$ אז $0\in C$. נגדיר פונקציה $f:B\to C$. יהי $b\in B$ (מכיוון ש $B\neq\varnothing$ מכיוון ש $B=\{0\}$ היא C - נחמדה ו B מקסימאלית ביחס להכלה) $f(x)=b-x$. f חח"ע. נניח בשלילה שהיא לא על ז"א קיים $t\in C$ כך שלכל $x\in B$ $b-x\neq t$ ז"א $b-t\notin B$ נראה ש $B\cup\{b-t\}$ C - נחמדה ונקבל סתירה למקסימאליות של B. מכיוון ש B C - נחמדה מספיק להראות שלכל $x\in B$ מתקיים $(b-t)-x\in C\wedge x-(b-t)\in C$

1. $(b-t)-x=(b-x)-t\in C$ שימו לב: $b,x\in B\Rightarrow b-x\in C$ ומכיוון ש $t\in C$ נקבל ש $(b-x)-t\in C$.
2. מכיוון ש $0\in C$ (הראינו) נקבל ש $x-(b-t)=0-((b-t)-x)\in C$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

א. (8)

תהיינה $h:B\to C, g:B\to C$ פונקציות כך ש $|B|\geq 2$ הוכח ש:

$f:C\to A$ חח"ע אם ורק אם לכל 2 פונקציות $h:B\to C, g:B\to C$ מתקיים

$f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$.

ב. (8) תהי A קבוצה אינסופית, $|A|=a$. תהי $B\subseteq A^A$, B בת מניה. הוכח ש- $|A^A\setminus B|=2^a$.

ג. (4) הוכח או הפרך: אם B קבוצה אינסופית אז $|B^{\mathbb{N}}|>|B|$.

הערה: אין קשר בין הסעיפים.

פתרון

א. $\Leftarrow$ נניח ש f חח"ע. יהי $x\in B$ מכיוון ש f חח"ע

$f\left(g\left(x\right)\right)=f\circ g\left(x\right)=f\circ h\left(x\right)=f\left(h\left(x\right)\right)\Rightarrow g\left(x\right)=h\left(x\right)$.

$\Rightarrow$ נתון שלכל שתי פונקציות מתקיים $f\circ g=f\circ h\Rightarrow g=h$. נניח בשלילה ש f לא חח"ע ז"א $f\left(x_1\right)=f\left(x_2\right)=c$ אבל $x_1\neq x_2$.

$h:B\to C$ המקיימת לכל $x\in B$ $h\left(x\right)=x_1$. יהי $b\in B$ $g:B\to C$ המקיימת

$$g\left(x\right)=\begin{cases}x_1 & x\neq b\\ x_2 & x=b\end{cases}.$$

$$c=f\left(x_1\right)=f\left(h\left(x\right)\right)=f\circ h\left(x\right)=f\circ g\left(x\right)=f\left(g\left(x\right)\right)=c$$

קיבלנו ש $f\circ g=f\circ h$ אבל $g\neq h$.

ב. בהרצאה ראינו שאם $k_1\leq k_2\wedge m_1\leq m_2$ עוצמות אז $k_1^{m_1}\leq k_2^{m_2}$ ולכן $|A|<\left|2^A\right|\leq\left|A^A\right|$ מכיוון ש A קבוצה אינסופית ו B בת מניה נקבל ש $|B|\leq|A|$ מהטרנזיטיביות בעוצמות נקבל ש $|B|<\left|A^A\right|$.

$A^A=\left(A^A\setminus B\right)\cup B\Rightarrow\left|A^A\right|=\left|A^A\setminus B\right|+|B|=\max\left\{\left|A^A\setminus B\right|,|B|\right\}$ מכיוון ש $|B|<\left|A^A\right|$ נקבל ש $\max\left\{\left|A^A\setminus B\right|,|B|\right\}=\left|A^A\setminus B\right|$ כי אחרת נקבל ש $\left|A^A\right|=|B|$ בסתירה לכך ש $|B|<\left|A^A\right|$ וקיבלנו את הדרוש.

ג. לא נכון: $\left|\mathbb{R}^{\mathbb{N}}\right|=\left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0}=2^{\aleph_0\cdot\aleph_0}=2^{\aleph_0}=|\mathbb{R}|$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

א. תהי $(A,\le)$ קבוצה סדורה היטב. לכל $a\in A$ נגדיר
$s(a)=\{x\in A|x\le a\wedge x\ne a\}$.

1. (7) תהי $B\subseteq A$ המקיימת: לכל $a\in A$, $s(a)\subseteq B \Rightarrow a\in B$. הוכח $A=B$.
2. (7) תהי $f:A\to A$ חח"ע, על ושומרת סדר (כלומר $(x\le y\Rightarrow f(x)\le f(y))$ אז f היא פונקצית הזהות על A. רמז: סעיף 1 יכול לעזור.

ב. (6) תן דוגמה לקבוצה עם יחס סדר מלא כך ש $B\subseteq A$, לכל $s(a)\subseteq B \Rightarrow a\in B$ אבל $A\ne B$.

פתרון

א.

1. נניח ש $B\ne A$ מכיון ש $B\subseteq A$ הקבוצה $A\setminus B$ לא ריקה ומכיוון ש A קבוצה סדורה היטב קיים איבר ראשון בקבוצה $A\setminus B$ נסמנו ב a ואז $s(a)\subseteq B$ כי אם $b\in s(a)$ אז $b\le a, b\ne a$ מכיון ש a ראשון ב $A\setminus B$ אז $b\notin A\setminus B$ ז"א $b\in B$.
קיבלנו ש $s(a)\subseteq B$ אבל $a\notin B$ בסתירה לנתון.

2. נסמן $B=\{b\in A| f(b)=b\}$.
אם $s(a)\subseteq B$ ו $a\notin B$ אז $f(a)=c\ne a$.
אפשרות 1: $c\le a$ ואז $c\in s(a) \Rightarrow c\in B \Rightarrow f(c)=c$ וקיבלנו סתירה לחח"ע.
אפשרות 2: $a\le c$ מכיון ש f על קיים $d\in A$ כך ש $f(d)=a$ ואז $f(d)\le f(a) \Rightarrow d\le a$ ז"א $d\in s(a) \Rightarrow d\in B \Rightarrow f(d)=d$ מכיון ש f פונקציה $a=d$ בסתירה לכך ש $a\notin B$.
סה"כ קיבלנו ש $a\in B$ ולכן $A=B$ ו f פונקצית הזהות.

ב.
נניח ש $A=[0,2]$ עבור הקבוצה $B=[0,1)$ מתקיים $s(1)\subseteq B$ אבל $1\notin B$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

א. (10) בכמה דרכים ניתן לחלק 6 כדורים לבנים ו – 4 כדורים צבעוניים (ב 4 צבעים שונים) ל – 10 תאים שונים כך ש:

1. (3) בכל תא יהיה כדור אחד בדיוק.
2. (3) בכל תא יהיה כדור אחד לבן לכל היותר ואין מגבלה על מספר הכדורים הצבעוניים בכל תא.
3. (4) אין מגבלה על מספר הכדורים בכל תא.

ב. (10) נתונה קבוצה סופית A , $|A|=n$. חשב את

1. (3) מספר היחסים הדו-מקומיים על A .
2. (3) מספר היחסים הרפלקסיביים על A .
3. (4) מספר היחסים על A הסימטריים והאנטיסימטריים בו זמנית.

פתרון

1. א. נבחר 6 מקומות להניח את הלבנים (בלי חשיבות לסדר) וזאת ב- $\binom{10}{6}$ דרכים

ואז יש $4!$ דרכים "לערבב" את הצבעוניים. סה"כ $\frac{10!}{6!}=4!\cdot\frac{10!}{4!\cdot 6!}=4!\cdot\binom{10}{6}$. דרך אחרת: נבחר 4 מקומות להניח את הצבעוניים (יש חשיבות לסדר) וזאת ב- $p(10,4)=\frac{10!}{6!}$ ואז יש רק דרך אחת להניח את הלבנים.

ב. . נבחר 6 מקומות להניח את הלבנים (בלי חשיבות לסדר) וזאת ב- $\binom{10}{6}$ דרכים ואז

יש 10^4 דרכים למקם את הצבעוניים. סה"כ $10^4\cdot\binom{10}{6}$.

ג. מספר הדרכים למקם 6 כדורים לבנים (זהים) ב-10 תאים שונים כך שתכולת כל תא היא בלתי מוגבלת הוא $D(10,6)=\binom{10-1+6}{10-1}=\binom{15}{9}$ ואז יש 10^4 דרכים למקם את הצבעוניים. סה"כ $10^4\cdot\binom{15}{9}$.

2. א. יחס דו - מקומי על A הוא קבוצה $R\subseteq A\times A$. לכן מספר היחסים הדו - מקומיים על A הוא כעוצמת $P(A\times A)$. וכידוע $|P(A\times A)|=2^{|A\times A|}=2^{|A|\cdot|A|}$. לכן המספר המבוקש הוא $2^{n\cdot n}$.

ב. לבניית יחס רפלקסיבי עלינו לקחת ראשית את כל הזוגות מהצורה (a,a). יוותרו לנו n^2-n זוגות, שלגבי כל אחד מהם יש 2 אפשרויות: האם הוא נכנס ליחס שנרכיב או לא. לכן מספר היחסים הרפלקסיביים על A הוא 2^{n^2-n}.

ג. יחס על A שהוא סימטרי ואנטיסימטרי בהכרח מוכל ב- I_A. לכן נקבל 2^n.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר $\varphi: A^B \to P(A)$ ע"י $\forall f \in A^B,\ \varphi(f) = A \setminus f[B]$.

א. (5) הוכח ש- $|A|<|B|$ אם ורק אם $\phi \notin im(\varphi)$.

ב. (5) נניח ש- B לא ריקה. הוכח ש- φ איננה על.

ג. (5) תן דוגמה לקבוצות A ו B כך ש φ חח"ע.

ד. (5) נגדיר יח"ש על A^B ע"י: לכל $f,g \in A^B$, $f \sim g \Leftrightarrow \varphi(f)=\varphi(g)$. אין צורך להוכיח שזהו יח"ש. נניח ש- A,B קבוצות סופיות וש- $|B|\le|A|$. מצא את $|A^B/\sim|$.

פתרון

א. נניח ש $|B|<|A|$ אז לא קיימת פונקציה $f:B\to A$ שהיא על ולכן לכל $f\in A^B$ ואז $A\setminus f[B]\neq\varnothing$. נניח ש $\varnothing\notin \operatorname{Im}\varphi$ אז לכל $f\in A^B$ מתקיים $A\setminus f[B]\neq\varnothing$ ז"א f לא על לכל $f\in A^B$ ולכן $|A|<|B|$.

ב. מכיוון ש $f[B]\neq\varnothing$ לא קיים ל A מקור.

ג. כן, ניקח את $A=B=\{1\}$ ואז $A^B=\{f\}$ כאשר $f(1)=1$ ואז $\varphi: A^B \to P(A)$ היא פונקציה שעבורה מתקיים $\varphi(f)=A\setminus f[B]=A\setminus\{1\}=\varnothing$ מכיוון שיש בתחום איבר אחד בלבד הפונקציה חח"ע.

ד. מספר תת הקבוצות של A בגודל k כך ש $0<k\le|B|$ ז"א $\sum_{i=1}^{|A|}\binom{|A|}{i}=2^{|A|}-1$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

א. (10) תהי B קבוצה אינסופית, נסמן $|B|=b$, ותהי $a\le b$ עוצמה. הוכח שקיימת חלוקה של B, נסמנה $\{C_i\}_{i\in I}$, כך שלכל $i\in I$ מתקיים $|C_i|=b$ וכן $|I|=a$.

ב. (10) הוכח שאם R יחס שקילות על A, אזי $\{[a]_R : a\in A\}$ חלוקה של A.

<u>פתרון</u>

א. מכיוון ש $a\le b$, B קבוצה אינסופית ו $|I|=a$ נקבל ממשפט המכפלה ש $|I|\cdot|B|=a\cdot b=\max\{a,b\}=b$. קיימת פונקציה $f:I\times B\to B$. נסמן $C_i=f\left[\{i\}\times B\right]$.

נוכיח שלכל $i\in I$ $|C_i|=b$ מכיוון ש $f:I\times B\to B$ חח"ע אז $f|_{\{i\}\times B}:\{i\}\times B\to f\left[\{i\}\times B\right]$ חח"ע ועל ולכן $b=|B|=|\{i\}\times B|=\left|f\left[\{i\}\times B\right]\right|=|C_i|$

נוכיח ש $\{C_i\}_{i\in I}$ חלוקה של A . נניח ש $C_i\cap C_j\ne\varnothing$ אז $x\in C_i\cap C_j$ ולכן $x\in f\left[\{i\}\times B\right]\cap f\left[\{j\}\times B\right]$ ומכיוון ש f פונקציה נקבל ש $i=j$.

מכיוון ש f על נקבל ש $\bigcup_{i\in I}C_i=\bigcup_{i\in I}f\left[(i,B)\right]=B$

ב.

מספיק להוכיח שהטענות הבאות שקולות:

א. $[a]=[b]$.

ב. $a\in[b]$.

ג. $[a]\cap[b]\ne\phi$.

א $\Leftarrow$ ב

נתון ש $[a]=[b]$ מכיוון ש R יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ מכיוון ש $[a]=[b]$ נקבל את הדרוש.

ב $\Leftarrow$ ג

נתון ש $a\in[b]$ מכיוון ש R יחס שקילות אז הוא יחס רפלקסיבי ולכן $(a,a)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $a\in[a]$ ולכן $a\in[a]\cap[b]$.

ג $\Leftarrow$ א

נתון ש $[a]\cap[b]\neq\phi$ ז"א שקיים $x\in A$ כך ש $x\in[a]\wedge x\in[b]$ ומהגדרת מחלקת שקילות נקבל ש $(a,x)\in R\wedge(b,x)\in R$ מכיוון ש R יחס סימטרי נקבל ש $(x,a)\in R$ ומכיוון ש R יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,a)\in R$.

יהי $y\in[a]$ על פי הגדרת מחלקת שקילות $(a,y)\in R$ מכיוון ש $(b,a)\in R$ ו R יחס טרנזיטיבי נקבל ש $(b,y)\in R$ ועל פי הגדרת מחלקת שקילות $y\in[b]$ ז"א $[a]\subseteq[b]$.

באותו אופן ניתן להוכיח ש $[b]\subseteq[a]$ ולקבל את הדרוש.