בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ד סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: ד"ר גיל אריאל, ד"ר סולומון וישקאוצן וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

<u>סעיף א (8 נקודות)</u>

נאמר שסדרה של מספרים ממשיים $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ היא מחזורית אם קיים $k\in\mathbb{N}$ קבוע כך ש $a_n=a_{n+k}$ לכל $n\in\mathbb{N}$. מצאו את עוצמת קבוצת כל הסדרות הממשיות המחזוריות.

<u>סעיף ב (15 נקודות)</u>

נגדיר $\sim$ יחס על קבוצת המספרים הרציונליים $\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ בצורה הבאה: עבור $a,b\in\mathbb{Q}\setminus\{0\}$ מתקיים $a\sim b$ אם ורק אם $\frac{a}{b}$ הוא ריבוע ב $\mathbb{Q}$, כלומר $\frac{a}{b}=\frac{c^2}{d^2}$ עבור מספרים שלמים $c,\mathrm{d}\in\mathbb{Z}$ (שימו לב ש- a,b הם לא בהכרח מספרים שלמים).

i. הראו ש $\sim$ יחס שקילות

ii. מצאו את עוצמתה של מחלקת שקילות

iii. מצאו את עוצמתה של קבוצת המנה

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב.

פתרון:

סעיף א':

נסמן ב A את קבוצת הסדרות המחזוריות של מספרים ממשיים
נראה בעזרת קנטור-ברנשטיין שמתקיים $|A| = א = 2^{\aleph_0}$. נשים לב ש A היא תת-קבוצה של קבוצת כל הסדרות הממשיות, ולכן
$|A| \le |\mathbb{R}^{\mathbb{N}}| = א^{\aleph_0} = \left(2^{\aleph_0}\right)^{\aleph_0} = 2^{\aleph_0 \aleph_0} = 2^{\aleph_0}$. מצד שני, נגדיר פונקציה חח"ע $f : \mathbb{R} \to A$ ע"י $f(r) = (r,r,r,r,r,...) = (r)_{i \in \mathbb{N}}$ (כל מספר ממשי עובר לסדרה קבועה), הפונקציה חח"ע מכיוון ש $f(r) = f(s) \Rightarrow (r,r,r,...) = (s,s,s,...) \Rightarrow r = s$ (שתי סדרות הן שוות אם מתקיים שיוויון איבר-איבר). לכן $א = |\mathbb{R}| \le |A|$. לכן לפי קנטור-ברנשטיין נקבל $|A| = א$.

סעיף ב':

i. $\sim$ רפלקסיבי: $\frac{a}{a} = 1 = \frac{1^2}{1^2}$ ולכן $a \sim a$ לכל $a \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

$\sim$ סימטרי: אם $a \sim b \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c^2}{d^2} \Rightarrow \frac{b}{a} = \frac{d^2}{c^2} \Rightarrow b \sim a$ לכל $a,b \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ (ניתן להפוך את השברים כי $b \neq 0$ וכיוון ש $a \neq 0$ ולכן $d \neq 0$).

$\sim$ טרנזיטיבי: יהיו $a,b,c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ונניח שמתקיים $a,b,c \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ וגם $a \sim b, b \sim c$. אזי קיימים שלמים $e,f,g,h \in \mathbb{Z}$ כך ש $\frac{a}{b} = \frac{e^2}{f^2}, \frac{b}{c} = \frac{g^2}{h^2}$

ומכאן $\frac{a}{c} = \frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} = \frac{e^2}{f^2} \cdot \frac{g^2}{h^2} = \frac{(eg)^2}{(fh)^2}$ ולכן $a \sim c$ (יש להעיר ש $eg, fh \in \mathbb{Z}$).

ii. כל מחלקת שקילות היא תת-קבוצה של $\mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ולכן
$[q] \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{0\} \Rightarrow |[q]| \le |\mathbb{Q} \setminus \{0\}| = \aleph_0$ (את השיוויון הימני ביותר ניתן לראות לדוגמה ע"י קנטור-ברנשטיין: $\mathbb{N} \subseteq \mathbb{Q} \setminus \{0\} \subseteq \mathbb{Q}$). מצד שני, נראה שכל מחלקת שקילות היא מעוצמה לפחות $\aleph_0$: יהי $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ אזי לכל $a \in \mathbb{N}$ מתקיים $a^2 q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ ומתקיים $a^2 q \sim q$ כי $\frac{a^2 q}{q} = \frac{a^2}{1^2}$.
לכן יש העתקה חח"ע $f : \mathbb{N} \to [q]$ המוגדרת ע"י $f(n) = n^2 q$ (חח"ע כיוון ש $f(n) = f(m) \Rightarrow n^2 q = m^2 q \Rightarrow n^2 = m^2 \Rightarrow n = \pm m \Rightarrow n = m$).
אם כך, לפי קנטור-ברנשטיין נקבל ש $|[q]| = \aleph_0$ לכל $q \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$.

iii. נשים לב ש $\left|{}^{\mathbb{Q} \setminus \{0\}}\!/\!_{\sim}\right| \le |\mathbb{Q} \setminus \{0\}| = \aleph_0$ כי לכל קבוצה X ולכל יחס שקילות $\sim$ קיימת העתקה על $\pi : X \to {}^{X}\!/\!_{\sim}$ המוגדרת ע"י $\pi(x) = [x]$, ולכן $\left|{}^{X}\!/\!_{\sim}\right| \le |X|$. כעת נשאר לבדוק האם קבוצת המנה היא סופית או

אינסופית (אם אינסופית אזי היא מעוצמה לפחות $\aleph_0$ ולכן לפי קנטור-ברנשטיין נקבל שיוויון). נראה שקיימות אינסוף מחלקות שקילות. תהי $(p_i)_{i\in\mathbb{N}}$ סדרת המספרים הראשוניים הטבעיים. בפרט מתקיים $p_i \in \mathbb{Q}\setminus\{0\}$ לכל $i\in\mathbb{N}$. מתקיים $[p_i]\neq[p_j]$ לכל $i,j\in\mathbb{N}$, $i\neq j$, כיוון שאם $[p_i]=[p_j]$ אזי $p_i\sim p_j$ כלומר $\frac{p_i}{p_j}=\frac{a^2}{b^2}$ עבור $a,b\in\mathbb{Q}$. ניתן לבחור את a,b כך ש p_i,p_j אינם מחלקים משותפים של a,b (אחרת ניתן לצמצם אותם).

$$\frac{p_i}{p_j}=\frac{a^2}{b^2}\Rightarrow p_ib^2=p_ja^2\Rightarrow p_i\mid p_ja^2\Rightarrow p_i\mid a^2\Rightarrow p_i\mid a\Rightarrow p_i^2\mid a^2$$

$$\Rightarrow p_i^2\mid p_ib^2\Rightarrow p_i\mid b^2\Rightarrow p_i\mid b$$

כלומר קיבלנו ש p_i מחלק משותף של a,b בסתירה לבחירת a,b.

ולכן $\left|\mathbb{Q}\setminus\{0\}/\sim\right|\geq\aleph_0$ ולפי קנטור-ברנשטיין נקבל $\left|\mathbb{Q}\setminus\{0\}/\sim\right|=\aleph_0$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

יהי R יחס מעל קבוצה X. נגדיר את היחסים הבאים:

$$R_2 = \left\{ (x,y) \in X^2 \mid \exists z \in X : xRz \wedge zRy \right\}$$

$$R^{-1} = \left\{ (x,y) \in X^2 \mid yRx \right\}$$

$$I = \left\{ (x,y) \in X^2 \mid x \in X \right\}$$

הוכח כי R הוא יחס סדר אמ"ם $\left(R^2 \subset R \right.$ וגם $\left. R \cap R^{-1} = I \right)$.

<u>פתרון:</u>

כיוון ->: נניח כי R יחס סדר.

רפלקסיביות -> $I \subset R$ ולכן גם $I \subset R^{-1}$, כלומר $I \subset R \cap R^{-1}$.

אנטי סמטריות -> $R \cap R^{-1} \subset I$. סה"כ $R \cap R^{-1} = I$.

טרנזיטיביות -> $R^2 \subset R$.

כיוון <-: נניח כי $R^2 \subset R$ וגם $R \cap R^{-1} = I$.

$R \cap R^{-1} = I$ -> R רפלקסיבי ואנטיסימטרי.

נניח כי $xRy \wedge yRz$. אז $(x,z) \in R_2 \subset R$. לכן טרנזיטיבי.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3 (23 נקודות)

הוכח את משפט המכפלה: אם X קבוצה אינסופית אז $|X\times X|=|X|$.

פתרון

נגדיר קבוצה $T=\{(A,f) \mid$ אינסופית $A\subseteq X$: פו' חח"ע ועל $f:A\times A\to A\}$.

$T\neq\varnothing$ מכיוון ש X קבוצה אינסופית ולכן מכילה קבוצה בת מניה $D\subseteq X$ ז"א $|A|=\aleph_0$ והוכחנו ש $\aleph_0\cdot\aleph_0=\aleph_0$, ולכן קיימת פונקציה $h:D\times D\to D$ ז"א

$(D,h)\in T$. נגדיר יחס סדר על T באופן הבא: $(A_1,f_1)\le(A_2,f_2)$ אם $A_1\subseteq A_2 \wedge f_2|_{A_1\times A_1}=f_1$ נשים לב ש $(T,\le)$ קבוצה סדורה חלקית. תהיי $\{(A_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת. נגדיר (A,f) באופן הבא: $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ ו $f:A\times A\to A$ מוגדרת ע"י לכל $(a,b)\in A\times A$ $f(a,b)=f_\alpha(a,b)$ מכיוון ש $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קיימים $\alpha,\beta\in I$ כך ש $a\in A_\alpha \wedge b\in A_\beta$ מכיוון ש $\{(A_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ניתן להניח ב.ה.ג.כ. ש $A_\beta\subseteq A_\alpha$ ז"א קיים $\alpha\in I$ כך ש $a,b\in A_\alpha$.

הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון ש $\{(A_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת.

f חח"ע – נניח ש $(a_2,b_2)\neq(a_1,b_1)$ מכיוון ש $\{(A_\alpha,f_\alpha)\}_{\alpha\in I}$ שרשרת קיים $\alpha\in I$ כך ש $(a_2,b_2),(a_1,b_1)\in A_\alpha\times A_\alpha$ ומכיוון ש f_α חח"ע נקבל ש $f(a_2,b_2)=f_\alpha(a_2,b_2)\neq f_\alpha(a_1,b_1)=f(a_1,b_1)$.

f על – יהי $a\in A$ מכיוון ש $A=\bigcup_{\alpha\in I}A_\alpha$ קיים $\alpha\in I$ כך ש $a\in A_\alpha$ מכיוון ש f_α פונקציה על קיימים $a_1,a_2\in A_\alpha$ כך ש $f(a_1,a_2)=f_\alpha(a_1,a_2)=a$. סה"כ קיבלנו ש $(A,f)\in T$. מהגדרת (A,f) נקבל שלכל $\alpha\in I$ $(A_\alpha,f_\alpha)\le(A,f)$ ולכן (A,f) חסם מלעיל של השרשרת ב T לפי הלמה של צורן קיים איבר מקסימאלי נסמנו ב (B,g) ב T כלומר $g:B\times B\to B$ פונקציה חח"ע ועל ז"א $|B|\cdot|B|=|B|$ נוכיח ש $|B|=|X|$.

מקרה 1: $|X\setminus B|\le|B|$.

$$|B|\le|X|=|B\cup(X\setminus B)|=|B|+|X\setminus B|\le|B|+|B|=2\cdot|B|\le|B|\cdot|B|=|B|$$

השוויון הראשון נובע מכיוון ש $B\subseteq X$. השוויון השני נובע מכיוון ש $X=B\cup(X\setminus B)$.

השוויון השלישי נובע מהגדרת חיבור עוצמות ומכיוון שהקבוצות $B,(X\setminus B)$ זרות.

האי שוויון הראשון נובע מכיוון ש $|X\setminus B|\le|B|$ ובנוסף הראינו שאם k_1,k_2,k_3,k_4 עוצמות כך ש $k_1\le k_2\wedge k_3\le k_4$ אז $k_1+k_3\le k_2+k_4$.

השוויון הרביעי נובע מכיוון ש $|B|\cdot 2=|B\times\{0,1\}|=|B\times\{a\}\cup B|=|B|+|B|$ שימו לב שקיים a שעבורו הקבוצה $B\times\{a\}$ והקבוצה B זרות וזאת מכיוון ש $|B|<|P(B)|$.

האי שוויון השני נובע מכיוון שאם k_1,k_2,k_3,k_4 עוצמות כך ש $k_1\le k_2\wedge k_3\le k_4$ אז $k_1\cdot k_3\le k_2\cdot k_4$.

וממשפט קנטור ברנשטיין קיבלנו ש $|B|=|X|$.

מקרה 2: $|B|<|X\setminus B|$ (ממשפט השוואת עוצמות נקבל שאין יותר מקרים.

מכיוון ש $|B|<|X\setminus B|$ קיימת קבוצה $B'\subseteq X\setminus B$ כך ש $|B|=|B'|$ (נשים לב ש B,B' קבוצות זרות)

$.|B'|=|B|=|B\times B|=|B'\times B'|=|B'\times B|=|B\times B'|$

$|B'|=3\cdot|B'\times B'|\Leftarrow|B'|=|B'\times B'|=3\cdot|B'|=3\cdot|B'\times B'|\Leftarrow|B'\times B'|=|B'|\le 3\cdot|B'|\le|B'\times B'|$

ואז כמו מקודם ניתן להראות ש $|B'|=|B'\times B|+|B\times B'|+|B'\times B|$

ז"א קיימת פונקציה חח"ע ועל $h:(B'\times B)\cup(B\times B')\cup(B'\times B')\to B'$.

נגדיר פונקציה $t:(B\cup B')\times(B\cup B')\to B\cup B'$ באופן הבא

$$.t(x,y)=\begin{cases} g(x,y) & (x,y)\in B\times B \\ h(x,y) & otherwise \end{cases}$$

מכיוון שכל הקבוצות $(B'\times B),(B\times B'),(B'\times B'),(B\times B)$ זרות הפונקציה מוגדרת היטב ומכיוון ש g,h חח"ע ועל t חח"ע ועל קיבלנו ש $(B\cup B',t)\in T$ בסתירה למקסימאליות של (B,g).

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

<u>סעיף א (12 נקודות)</u>

בהינתן קבוצה $A\neq\varnothing$,

נגדיר פונקציה $f:A\to P(P(A))$ ע"י $f(a)=\{B|B\subseteq A, a\in B\}$.

לדוגמא: אם $A=\{1,2\}$ אז $f(1)=\{\{1\},\{1,2\}\}$.

הוכח או הפרך:

i. f היא חד חד ערכית.

.ii f היא על.

<u>סעיף ב (11 נקודות)</u>

בהינתן קבוצה $A\neq\varnothing$,
נגדיר פונקציה $f:P(A)\to P\left(P(A)\right)$ ע"י $f(X)=\{B|B\subseteq A, X\subseteq B\}$.
לדוגמא: אם $A=\{1,2,3\}$ אז $f\left(\{1,2\}\right)=\{\{1,2\},\{1,2,3\}\}$.

.i מצא את $f(\varnothing)$.

הוכח או הפרך:

.ii f היא חד חד ערכית.

.iii f היא על.

פתרון

<u>סעיף א1</u>

נכון.

הוכחה:

נניח ש $a\neq b\in A$. $\{a\}\notin f(b)$ מכיוון ש $b\notin\{a\}$.

מכיוון ש $a\in\{a\}$ ולכן $\{a\}\in f(a)$. סה"כ קיבלנו ש $f(a)\neq f(b)$.

<u>סעיף א2</u>

לא נכון.

דוגמא נגדית $A=\{1\}$. $f(1)=\{\{1\}\}$ ז"א לא קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=\varnothing$ ו $\varnothing\in P\left(P(A)\right)$.

סה"כ הפונקציה לא על.

<u>סעיף ב1</u>

$\varnothing$ מוכלת בכל קבוצה ולכן $f(\varnothing)=\{P(A)\}$.

<u>סעיף ב2</u>

נכון.

הוכחה:

נניח ש $X\neq Y\in P(A)$. נניח ב.ה.ג.כ שקיים x כך ש $x\in X\wedge x\notin Y$ ז"א לא ייתכן ש $X\subseteq Y$ ולכן $Y\notin f(X)$. מכיוון ש $Y\subseteq Y$ נקבל ש $Y\in f(Y)$ ז"א $f(X)\neq f(Y)$.

<u>סעיף ב3</u>

לא נכון.

דוגמא נגדית $A=\{1\}$. $f(\varnothing)=\{\varnothing,\{1\}\}, f(\{1\})=\{\{1\}\}$ ז"א לא קיים $a\in A$ כך ש $f(a)=\varnothing$ ו $\varnothing\in P(P(A))$.
סה"כ הפונקציה לא על.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

יהי M קבוצה, $f:M\times M\to M$ פונקציה, במקום $f(x,y)$ נכתוב $x*y$.
נניח כי: לכל $x,y,z\in M$ $(x*y)*z=x*(y*z)$ וקיים איבר $1\in M$ כך שלכל $x\in M$ $x*1=x$. תהיי $L\subseteq M$. נגדיר יחס $\approx$ מעל M ע"י:
לכל $x,y\in M$: $x\approx y\Leftrightarrow \forall v\in M(x*v\in L\leftrightarrow y*v\in L)$.

א. (8 נקודות) הוכיחו כי $\approx$ יחס שקילות מעל M.

ב. (7 נקודות) לכל $a\in M$ תהיי $[a]$ מחלקת השקילות של a לפי $\approx$. תהיי K קבוצת כל מחלקות השקילות של M לפי $\approx$. הוכיחו כי $g:K\times M\to K$ כך שלכך $x,z\in M$ $g([x],z)=[x*z]$ אכן פונקציה.

ג. (8 נקודות) הוכיחו כי אם $x\in L$ ו $y\approx x$ אז $y\in L$.

פתרון

<u>סעיף א</u>

רפלקסיביות: מכיוון ש $f:M\times M\to M$ פונקציה נקבל שלכל $v\in M$ $x*v=x*v$ ולכן $x*v\in L\Leftrightarrow x*v\in L$ ז"א $x\approx x$.

סימטריות: נניח ש $x\approx y$ ז"א לכל $v\in M$ $x*v\in L\leftrightarrow y*v\in L$ ולכן לכל $v\in M$ מתקיים $y*v\in L\leftrightarrow x*v\in L$ ז"א $y\approx x$.

טרנזטיביות: נניח ש $x\approx y\wedge y\approx z$ ז"א לכל $v\in M$ $x*v\in L\leftrightarrow y*v\in L\wedge y*v\in L\leftrightarrow z*v\in L$ סה"כ נקבל $x*v\in L\leftrightarrow z*v\in L$ ולכן $x\approx z$.

<u>סעיף ב</u>

נראה שלכל איבר ב $([x],z)\in K\times M$ מתקיים $g([x],z)\in K$.

$[x]\in K$ ולכן $[x]$ מחלקת שקילות ז"א $x\in M$, $z\in M$. מכיוון ש $f:M\times M\to M$ פונקציה נקבל ש $x*z\in M\leftarrow[x*z]$ מחלקת שקילות ולכן $[x*z]\in K$ כדרוש.

נראה שאם $([x],z)=([y],z)$ אז $g([x],z)=g([y],z)$.

$([x],z)=([y],z)\Leftarrow[x]=[y]\Leftarrow x\approx y$. יש להראות ש $[x*z]=[y*z]$ ולכן מספיק להראות ש $x*z\approx y*z$. נניח ש $(x*z)*v\in L$ על פי הנתון $x*(z*v)=(x*z)*v$ ולכן $x*(z*v)\in L$. מכיוון ש $x\approx y$ נקבל ש $y*(z*v)\in L$ על פי הנתון $y*(z*v)=(y*z)*v$ ולכן $(y*z)*v\in L$. באותו אופן ניתן להוכיח שאם $(y*z)*v\in L$ אז $(x*z)*v\in L$ ולכן $x*z\approx y*z$ כדרוש.

<u>סעיף ג</u>

נתון ש $y\approx x$ ז"א לכל $v\in M$ מתקיים $y*v\in L\leftrightarrow x*v\in L$ ובפרט עבור $v=1$ מתקיים $y*1\in L\leftrightarrow x*1\in L$ על פי הנתון $x*1=x\in L$ ולכן $y=y*1\in L$.