בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ג סמסטר קיץ מועד ב

מרצים: מר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 23 נקודות, לכן יש סה"כ **115** נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 1

<u>סעיף א (15 נק')</u>

תהיינה A,B קבוצות.

i. הוכיחו או הפריכו $A\setminus B=\phi \Leftrightarrow A\subseteq B$

ii. הוכיחו כי $(A\Delta B)\Delta B=A$

iii. הוכיחו או הפריכו $A\cap(B\setminus C)=(A\cap B)\setminus(A\cap C)$

<u>סעיף ב (8 נק')</u>

תהיינה A,B קבוצות, ותהי $f:A\to B$ פונקציה

i. הוכיחו או הפריכו $f[A]\setminus f\left[f^{-1}[B]\right]=\phi$.

ii. הוכיחו או הפריכו כי לכל $X,Y\subseteq A$ מתקיים $f[X\Delta Y]\subseteq f[x]\Delta f[Y]$

פתרון

<u>סעיף א</u>

i. נכון

הוכחה

$\Leftarrow$

נתון ש $A\subseteq B$. אם $x\in A\setminus B$ אז $x\in A$ נתון ש $A\subseteq B$ ולכן $x\in B$

בסתירה לכך ש $x\in A\setminus B$ ולכן $A\setminus B=\phi$.

$\Rightarrow$

נניח בשלילה ש $A\not\subset B$ ז"א קיים $x\in A$ ו $x\notin B$ ז"א $x\in A\setminus B$ בסתירה

לכך ש $A\setminus B=\phi$.

ii. נסמן $C=A\Delta B$ ונחשב את $C\Delta B$. $C\Delta B=\left(C\cap B^c\right)\cup\left(B\cap C^c\right)$.

$$C\cap B^c=(A\Delta B)\cap B^c=\left(\left(A\cap B^c\right)\cup\left(B\cap A^c\right)\right)\cap B^c=\left(\left(A\cap B^C\right)\cap B^c\right)\cup\left(\left(B\cap A^c\right)\cap B^c\right)$$

$$=\left(A\cap\left(B^c\cap B^c\right)\cup\left(A^c\cap\left(B\cap B^c\right)\right)\right)=\left(A\cap B^c\right)\cup\phi=A\cap B^c$$

$$B\cap C^c=B\cap\left((A\cup B)\cap(A\cap B)^c\right)^c=B\cap\left((A\cup B)^c\cup(A\cap B)\right)=$$

$$=B\cap\left(\left(A^c\cap B^c\right)\cup(A\cap B)\right)=B\cap\left(\left(A^c\cap B^c\right)\cup(A\cap B)\right)=$$

$$=\left(B\cap\left(A^c\cap B^c\right)\right)\cup\left(B\cap(A\cap B)\right)=\left(\left(B\cap B^c\right)\cap A^c\right)\cup\left((B\cap B)\cap A\right)=$$

$$=\left(\phi\cap A^c\right)\cup(A\cap B)=A\cap B$$

$\left(A\cap B^c\right)\cup\left(A\cap B\right)=A$

הוכחה נוספת: הפר סימטרי אסוציאטיבי ולכן

$(A\Delta B)\Delta B=A\Delta\left(B\Delta B\right)=A\Delta\varnothing=A$.

iii. $\left(A\cap B\right)\cap\left(A\cap C\right)^c=\left(A\cap B\right)\cap\left(A^c\cup C^c\right)=$

$\left(\left(A\cap B\right)\cap A^c\right)\cup\left(\left(A\cap B\right)\cap C^c\right)=\phi\cup\left(\left(A\cap B\right)\cap C^c\right)=A\cap\left(B\cap C^c\right)$

<u>סעיף ב</u>

i. הוכחה

מסעיף א1 מספיק להוכיח ש $f\left[A\right]\subseteq f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$ יהי $y\in f\left[A\right]$ ז"א קיים $x\in A$ כך ש $f\left(x\right)=y$ ולכן $x\in f^{-1}\left[B\right]$ ואז $y=f\left(x\right)\in f\left[f^{-1}\left[B\right]\right]$.

ii. לא נכון

דוגמא נגדית

$X=\{1\},Y=\{2\},A=\{1,2\},B=\{3\}$

$f\left(1\right)=f\left(2\right)=3$

$X\Delta Y=\{1,2\},\ f\left[\{1,2\}\right]=\{3\}$

$f\left[x\right]=\{3\},\ f\left[Y\right]=\{3\}\Rightarrow f\left[x\right]\Delta f\left[Y\right]=\phi$

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 2

<u>סעיף א (23 נק')</u>

תהי A קבוצה אינסופית.

i. **(12 נק')** יהי $k \in \mathbb{N}$ ותהי $S_k = \{X \subseteq A : |X| = k\}$.
הוכיחו כי $|S_k| = |A|$ (רמז: משפט ק.ש.ב.)

ii. **(7)** תהי $S = \{X \subseteq A : |X| < \infty\}$ (אוסף תתי הקבוצות הסופיות של A).
הוכיחו כי $|S| = |A|$

iii. **(4)** תהי $T = \{X \subseteq A : |X| \geq \aleph_0\}$ (אוסף תתי הקבוצות האינסופיות של A).
הוכיחו כי $|T| = 2^{|A|}$

פתרון

i. נבנה פונקציה חח"ע $f : S_k \to \overbrace{A \times ... \times A}^{k-times}$ המוגדרת ע"י $f(X) = (a_1, a_2, ..., a_k)$.
מכיוון ש A קבוצה אינסופית ניתן לבחור $k-1$ איברים ב A $\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}$. נבנה פונקציה חח"ע $f : A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\} \to S_k$.
$f(b) = \{a_1, ..., a_{k-1}, b\}$

$$|A| = |A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\} \cup \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}| = |A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}| + |\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}| =$$
$$\max\{|A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}|, |\{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}|\} = |A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}|$$

$|A| = |A \setminus \{a_1, a_2, ..., a_{k-1}\}| \leq |S_k| = \left|\overbrace{A \times A \times ... \times A}^{k-times}\right| = |A|$ ומ ק.ש.ב נקבל את הדרוש.

ii. נוכיח ש $|S_k| = |S|$ ומסעיף קודם נקבל את הדרוש. נבנה פונקציה חח"ע ועל $S \setminus \{\phi\} = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k \Rightarrow |S \setminus \{\phi\}| = \left|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k\right|$ מכיוון שלכל $k \in \mathbb{N}$ $|S_k| = |A|$ נקבל ש $\left|\bigcup_{k \in \mathbb{N}} S_k\right| = |\mathbb{N} \times A| = \max\{|\mathbb{N}|, |A|\} = |A|$. נשים לב ש $|S \setminus \{\phi\}| = |S|$.

iii. נשים לב ש $P(A) = S \cup T \Rightarrow 2^{|A|} = |P(A)| = |S \cup T| = |S| + |T| = \max\{|S|, |T|\}$
מכיוון ש $|S| = |A|$ ו $|A| < |P(A)|$ נקבל ש
$|P(A)| = |T| \Leftarrow |P(A)| = \max\{|S|, |T|\}$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 3

<u>סעיף א (23 נק')</u>

תהי X קבוצה אינסופית מעוצמה a. נגדיר יחס R על $P(X)$ על ידי $ARB \Leftrightarrow |A \triangle B| < \infty$ (כלומר ההפרש הסימטרי בין שתי הקבוצות הוא מעוצמה סופית)

i. הוכיחו כי R יחס שקילות.
ii. תהי קבוצה $A \subseteq X$ מצאו את $|[A]_R|$, הוכיחו.
iii. מצאו את $\left|{}^{P(X)}\!/_{R}\right|$, הוכיחו.

(מותר להשתמש בשאלה 2)

פתרון

i. נוכיח רפלקסיביות

$A \Delta A = (A \cup A) \setminus (A \cap A) = A \setminus A = \phi \Rightarrow |A \Delta A| < \infty$.

נוכיח סימטריות

נניח ש $|A \Delta B| < \infty$ ז"א $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| < \infty$ מכיוון ש $(A \cup B) \setminus (A \cap B) = (B \cup A) \setminus (B \cap A)$ נקבל ש $|(B \cup A) \setminus (B \cap A)| < \infty$.

נוכיח טרנזיטיביות

נניח ש $|A \Delta B|, |B \Delta C| < \infty$ ז"א $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| < \infty, |(B \cup C) \setminus (B \cap C)| < \infty$

נניח ש $x \in (A \cup C) \setminus (A \cap C)$ אם $x \in A$ אז $x \notin C$.

אם $x \in B$ אז $x \in (B \cup C) \setminus (B \cap C)$. אם $x \notin B$ אז $x \in (A \cup B) \setminus (A \cap B)$.

סה"כ קיבלנו ש $x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))$.

באותו אופן ניתן להראות שאם $x \in C$ אז
$x \in ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))$.

סה"כ קיבלנו ש
$(A \cup C) \setminus (A \cap C) \subseteq ((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))$.

מכיוון ש $|(A \cup B) \setminus (A \cap B)| < \infty, |(B \cup C) \setminus (B \cap C)| < \infty$ נקבל ש
$|((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))| < \infty$ סה"כ קיבלנו ש
$|(A \cup C) \setminus (A \cap C)| \le |((A \cup B) \setminus (A \cap B)) \cup ((B \cup C) \setminus (B \cap C))|$.

ii. $[A]_R = \{B \subseteq X \mid A \setminus B < \infty \wedge B \setminus A < \infty\}$

נבנה פונקציה חח"ע $f : [A]_R \to S \times S$ כאשר $S = \{A \subseteq X : |A| < \infty\}$.

$f(B) = (A \setminus B, B \setminus A)$.

נוכיח ש f חח"ע. נניח ש $f(B_1) = f(B_2)$ ז"א $(A \setminus B_1, B_1 \setminus A) = (A \setminus B_2, B_2 \setminus A)$ ולכן $A \setminus B_1 = A \setminus B_2 \wedge B_1 \setminus A = B_2 \setminus A$.

יהי $x \in B_1$ אם $x \in A$ אז $x \notin A \setminus B_1$ ומכיוון ש $A \setminus B_1 = A \setminus B_2$ נקבל ש $x \notin A \setminus B_2$ ז"א $x \in B_2$.

אם $x \notin A$ אז $x \in B_1 \setminus A$ ומכיוון ש $B_1 \setminus A = B_2 \setminus A$ נקבל ש $x \in B_2 \setminus A$ ז"א $x \in B_2$.

סה"כ קיבלנו ש $B_1 \subseteq B_2$. באותו אופן ניתן להראות ש $B_2 \subseteq B_1$ ולכן $B_1 = B_2$.

$\left|[A]_R\right| \le |S \times S| = |X \times X| = |X|$

נבנה פונקציה $f : [A]_R \to S$ המוגדרת ע"י $f(C) = A \Delta C$.

נוכיח ש f על. עבור $B \in S$ נקבל ש $f(A \Delta B) = A \Delta (A \Delta B) = B$.

ולכן $|X| = |S| \le \left|[A]_R\right|$ ולפי ק.ש.ב הוכחנו ש $|X| = \left|[A]_R\right|$.

iii. $\bigcup_{A \subseteq X} [A]_R = P(X)$ מכיוון שאם A קבוצה אינסופית ו $\{A_i\}_{i \in I}$ משפחה של קבוצות זרות כך ש $|A_i| = |A|$ לכל $i \in I$ אז $\left|\bigcup_{i \in I} A_i\right| = |I \times A| = \max\{|I|, |A|\}$

ואז $\left| P(X) / R \right| = |P(X)|$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 4

<u>סעיף א (23 נק')</u>

תהי T קבוצת כל העיגולים במישור.

כלומר: $c\in T\Leftrightarrow c=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\middle|(x-a)^2+(y-b)^2\le r^2\right\}$ כאשר $r\in\mathbb{R}^+;a,b\in\mathbb{R}$

הוכיחו שקיימת קבוצה $S\subseteq T$ של עיגולים במישור המקיימת את התנאים הבאים:

1. אין חיתוך בין אף שני עיגולים בקבוצה, כלומר $\forall c_1,c_2\in S:(c_1=c_2)\vee(c_1\cap c_2=\phi)$
2. לכל עיגול במישור קיים עיגול בקבוצה S החותך אותו, כלומר $\forall c\in T\exists x\in S:c\cap x\neq\phi$

<u>סעיף ב (בונוס 5 נק') מומלץ לענות על שאלת הבונוס לאחר סיום המבחן</u>

מצאו את עוצמת הקבוצה S מהסעיף הקודם, הוכיחו.

פתרון

נסמן $P=\left\{S\subseteq T\middle|c_1,c_2\in S\Leftrightarrow(c_1=c_2)\vee(c_1\cap c_2=\phi)\right\}$. הקבוצה P לא ריקה מכיוון שקבוצה עם עיגול אחד שייכת ל P.

נגדיר יחס על הקבוצה P $S_1RS_2\Leftrightarrow S_1\subseteq S_2$ ויחס ההכלה הוא יחס סדר חלקי.

תהיי $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב P.

נוכיח שהקבוצה $\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha$ חסם מלעיל ב P לשרשרת $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

נוכיח שאם $c_1,c_2\in\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha$ אז $c_1\cap c_2=\varnothing$.

$c_1\in\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha$ ואז קיים $\alpha\in I$ כך ש $c_1\in S_\alpha$, $c_2\in\bigcup_{\alpha\in I}S_\alpha$ ואז קיים $\beta\in I$ כך ש $c_2\in S_\beta$. מכיוון ש $\{S_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב P נקבל ש $S_\alpha\subseteq S_\beta\vee S_\beta\subseteq S_\alpha$.

נניח ב.ה.ג.כ ש $S_\alpha \subseteq S_\beta$. $c_1 \in S_\alpha$ ולכן $c_1 \in S_\beta$ מכיוון ש $c_2 \in S_\beta$ ו $S_\beta \in P$ נקבל ש $(c_1 = c_2) \vee (c_1 \cap c_2 = \phi)$ ולכן $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha \in P$ ומכיוון שלכל $\alpha \in I$ $S_\alpha \subseteq \bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ נקבל ש $\bigcup_{\alpha \in I} S_\alpha$ חסם מלעיל ולכן קיים איבר מקסימאלי S ב P.

מכיוון ש $S \in P$ תנאי 1 בשאלה מתקיים.

נניח שתנאי 2 לא מתקיים כלומר קיים $c \in T \setminus S$ כל שלכל $x \in S$ $c \cap x = \varnothing$

במקרה כזה $S \cup \{c\} \in P$ מכיוון ש $S \subset S \cup \{c\}$ נקבל סתירה למקסימאליות.

<u>סעיף ב</u>

מכיוון שבין כל שני מספרים ממשים קיים מספר רציונאלי נקבל שבכל עיגול קיים זוג סדור (a,b) כך ש $(a,b) \in \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$.

בצורה כזאת ניתן לבנות פונקציה חח"ע $f : S \to \mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ ולכן $|S| \le \aleph_0$.

מכיוון שהקבוצה S אינסופית נקבל ש $|S| = \aleph_0$.

ענו בפירוט בדף זה

שאלה 5

<u>סעיף א (13 נק')</u>

תהי A קבוצה סופית עם n איברים $(|A|=n)$

i. יהי R יחס סדר מלא על A. מצאו את $|R|$, נמקו.

ii. מהו מספר יחסי השקילות על A שקבוצת המנה שלהם בגודל 1? נמקו.

iii. מהו מספר יחסי השקילות על A שקבוצת המנה שלהם בגודל 2? נמקו.

<u>סעיף ב (10 נק')</u>

i. הגדירו פונקציה הפיכה

ii. הוכיחו כי f הפיכה אם ורק אם f חח"ע ועל

<u>סעיף א</u>

i.

יש לבחור את כל הזוגות האפשריים ללא חשיבות לסדר (מכיוון שיחס סדר מלא אנטי סימטרי) $\binom{n}{2}=\frac{n!}{2!(n-2)!}=\frac{n\cdot(n-1)}{2}$.

מכיוון שיחס סדר מלא רפלקסיבי נקבל שאם $a\in A$ אז $(a,a)\in R$ ולכן $|R|=\frac{n(n-1)}{2}+n=\frac{n(n+1)}{2}$.

ii.

מספר מחלקות השקילות הוא 1. היחס המלא הוא היחס שקילות היחיד עם מחלקת שקילות 1.

iii.

מספר האפשרויות לשתי קבוצות $A_1,A_2\subseteq A$ כך ש $A_1\cap A_2=\varnothing$ ו $A_1\cup A_2=A$.

עבור כל תת קבוצה $B\neq\varnothing$ ניקח את $A\setminus B$.

מספר תתי הקבוצות של A הוא 2^n ומכיוון ש $\{A_1,A_2\}=\{A_2,A_1\}$ נחלק את התתי קבוצות ב 2 ונוריד את הקבוצה הריקה.

סה"כ מספר האפשרויות הוא $2^{n-1}-1$.

<u>סעיף ב</u>

i.

תהיינה A,B קבוצות ותהיי $f:A\to B$ פונקציה. הפונקציה f הפיכה אם קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש $g\circ f=I_A \wedge f\circ g=I_B$. הפונקציה g תקרא הפונקציה ההופכית של f ותסומן ע"י f^{-1}.

.ii

$\Leftarrow$

נתון ש f הפיכה ולכן קיימת פונקציה $g:B\to A$ כך ש $f\circ g=I_B \wedge g\circ f=I_A$.

מכיוון ש $g\circ f=I_A$ נקבל ש $g\circ f$ חח"ע וממשפט קודם f חח"ע.

מכיוון ש $f\circ g=I_B$ נקבל ש $f\circ g$ על וממשפט קודם f על.

$\Rightarrow$

נתון ש f חח"ע ועל.

נגדיר פונקציה $g:B\to A$. יהי $b\in B$ מכיוון ש f על $f^{-1}\left[\{b\}\right]\neq\phi$ ומכיוון ש f חח"ע קיים לכל היותר איבר אחד ב $f^{-1}\left[\{b\}\right]$ ז"א בקבוצה $f^{-1}\left[\{b\}\right]$ קיים איבר אחד ויחיד נסמנו ב a_b.

$g(b)=a_b$ הפונקציה מוגדרת היטב מכיוון שלכל $b\in B$ קיים איבר אחד ויחיד ב $f^{-1}\left[\{b\}\right]$.

נוכיח שהפונקציה $g:B\to A$ היא ההופכית של הפונקציה f.

יהי $a\in A$ נסמן $f(a)=b$ ואז $a=a_b$. $(g\circ f)(a_b)=g\left(f(a_b)\right)=g(b)=a_b$.

יהי $b\in B$ ואז $(f\circ g)(b)=f\left(g(b)\right)=f(a_b)=b$.