בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"א סמסטר קיץ מועד א

מרצים: ד"ר שי סרוסי וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט וראש פתוח.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על 5 שאלות **בדיוק**, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

הקיפו בטבלה הבאה את מספרי השאלות אותן בחרתם.
אחרת, יבדקו 5 הראשונות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	
6	

ציון:

בהצלחה

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 1

תהי A קבוצה לא ריקה כך ש $|A|\geq 2$.

נגדיר פונקציה:

$$f: A\times P(A)\rightarrow P(P(A))$$

ע"י

$$f(x,U)=\{V\subseteq U \mid x\in V\}$$

א. הוכח ש- f איננה חח"ע.

ב. הוכח ש- f איננה על.

ג. הוכח ש- $f(x,U\cap V)=f(x,U)\cap f(x,V)$.

ד. הוכח שקיימות $U,V\subseteq A$ כך ש- $f(x,U\cup V)\neq f(x,U)\cup f(x,V)$?

פתרון

א. הפונקציה f לא חח"ע – נתון ש $|A|\geq 2$ יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $x_1\neq x_2$ נסמן $U_1=\{x_2\}$ ו $U_2=\{x_1\}$ כעת $f\left(x_1,U_1\right)=\{\phi\}\wedge f\left(x_2,U_2\right)=\{\phi\}$.

ב. הפונקציה f לא על - $\{A\}\in P(P(A))$ נניח בשלילה שקיים (x,U) כך ש $f(x,U)=\{A\}$ ז"א $\{V\subseteq U|x\in V\}=\{A\}$ ולכן $U=A$ מכיוון ש $x\in A$ אז $\{x\}\subseteq A$ ולכן $\{\{x\}\}\in\{V\subseteq U|x\in V\}$ נתון ש $|A|\geq 2$ ולכן $\{x\}\neq A$ ז"א $\{\{x\}\}\notin\{A\}$ בסתירה לכך ש $\{V\subseteq U|x\in V\}=\{A\}$.

ג. הוכחה -

$$f\left(x,U\cap V\right)=\left\{W\subseteq U\cap V\middle|x\in W\right\}=\left\{W\subseteq U\wedge W\subseteq V\middle|x\in W\right\}=$$
$$=\left\{W\subseteq U\middle|x\in W\right\}\cap\left\{W\subseteq V\middle|x\in W\right\}=f\left(x,U\right)\cap f(x,V)$$

ד. נתון ש $|A|\geq 2$ יהיו $x_1,x_2\in A$ כך ש $x_1\neq x_2$ נסמן $U=\{x_2\}$ ו $V=\{x_1\}$

$$f\left(x_1,U\cup V\right)=f(x_1,\{x_1,x_2\})=\left\{\{x_1\},\{x_1,x_2\}\right\}$$
$$f(x_1,U)=\{\phi\},\ f\left(x_1,V\right)=\left\{\{x_1\}\right\}$$

ולכן אי השוויון מתקיים.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 2

תהי X קבוצה. תת קבוצה $F \subseteq P(X)$ המקיימת את התנאים הבאים:

1. $X \in F$.
2. אם $A \in F$ אז $A^c \in F$ (כאשר $A^c = X \setminus A$). (מקובל לומר במקרה זה ש- F סגורה למשלים.)
3. אם $\{A_i\}_{i \in I} \subseteq F$ אזי $\bigcup_{i \in I} A_i \in F$. (מקובל לומר במקרה זה ש- F סגורה לאיחוד.)

נקראת סיגמה אלגברה מוכללת על X.

א. תן דוגמא מפורשת: איחוד של שתי סיגמא אלגבראות מוכללות על X אינו בהכרח סיגמה אלגברה מוכללת על X.

ב. נניח ש $X = \bigcup_{i \in I} A_i$ איחוד זר של קבוצות.
נגדיר: $F = \{T \subseteq X \mid \forall i \in I : T \cap A_i \in \{\phi, A_i\}\}$.
הוכח ש F סיגמה אלגברה מוכללת על X.

פתרון

א. נניח ש $X = \{1,2,3,4\}$ נתבונן ב $A_1 = \{\phi, \{1\}, \{2,3,4\}, X\}$, $A_2 = \{\phi, \{2\}, \{1,3,4\}, X\}$.
כעת $A_1 \cup A_2 = \{\phi, \{1\}, \{2\}, \{1,3,4\}, \{2,3,4\}, X\}$ לא סיגמה אלגברה מוכללת מכיוון ש $\{1\}, \{2\} \in A_1 \cup A_2$ אבל $\{1,2\} \notin A_1 \cup A_2$.

ב.

1. נתון ש $X = \bigcup_{i \in I} A_i$, על פי הגדרת האיחוד לכל $i \in I$ $A_i \subseteq X$ ועל פי הגדרת החיתוך לכל $i \in I$ $A_i \cap X = A_i$ ולכן לכל $i \in I$ $X \cap A_i \in \{\phi, A_i\}$ בנוסף $X \subseteq X$ ולכן $X \in F$.
2. נניח ש $A \in F$ ז"א ש $A \subseteq X$ ו לכל $i \in I$ $A \cap A_i \in \{\phi, A_i\}$.

מקרה א:

$A\cap A_i=\phi$ ז"א $a\in A_i\Rightarrow a\notin A\Rightarrow a\in A^c$ ועל פי הגדרת ההכלה
$A_i\subseteq A^c$ ועל פי הגדרת החיתוך $A^c\cap A_i=A_i\in\{\phi,A_i\}$ ז"א $A^c\in F$.

מקרה ב:

$A\cap A_i=A_i$ ז"א $a\in A_i\Rightarrow a\in A\cap A_i\Rightarrow a\in A$ ועל פי הגדרת
ההכלה $A_i\subseteq A$ ועל פי הגדרת החיתוך $A^c\cap A_i=\phi\in\{\phi,A_i\}$ ז"א
$A^c\in F$.

סה"כ קיבלנו שאם $A\in F$ אז $A^c\in F$.

3. תהי $\{T_j\}_{j\in J}\subseteq F$

$A_i\cap\left(\bigcup_{j\in J}T_j\right)=\bigcup_{j\in J}\left(A_i\cap T_j\right)$ מכיוון ש $T_j\in F$ לכל $j\in J$ נקבל ש
$A_i\cap T_j\in\{\phi,A_i\}$,

ולכן $\bigcup_{j\in J}\left(A_i\cap T_j\right)\in\{\phi,A_i\}$

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 3

תהי A קבוצה סופית לא ריקה ותהי $B\subseteq A$.

נגדיר $R=\{(f,g)\ |\ f,g\in\{0,1\}^A,\ B\subseteq\{x\in A|\ f(x)=g(x)\}\ \}$.

א. הוכיחו ש-R הינו יחס שקילות מעל $\{0,1\}^A$.

ב. עבור $B=\phi$, מצאו $|{\{0,1\}^A}/{R}|$.

ג. מצאו $|{\{0,1\}^A}/{R}|$.

פתרון

א.

<u>רפלקסיביות</u>

תהי $f\in\{0,1\}^A$ **לכל** $x\in A$ $f(x)=f(x)$ **ולכן** $\{x\in A\ |f(x)=f(x)\}=A$ **, נתון ש** $B\subseteq A$ **ולכן** $B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=f(x)\}$ **, ז"א** $(f,f)\in R$**.**

<u>סימטריות</u>

תהיינה $f,g\in\{0,1\}^A$ **כך ש** $(f,g)\in R$**, על פי הגדרת** R

$B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}$ **ומכיוון ש**

$\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}=\{x\in A\ |g(x)=f(x)\}$ **נקבל ש** $B\subseteq\{x\in A\ |g(x)=f(x)\}$

ז"א $(g,f)\in R$**.**

<u>טרנזיטיביות</u>

תהיינה $f,g,h\in\{0,1\}^A$ **כך ש** $(f,g)\in R\wedge(g,h)\in R$**, על פי הגדרת** R

$B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}$ **וגם** $B\subseteq\{x\in A\ |g(x)=h(x)\}$**.**

יהי $x\in B$ **מכיוון ש** $B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}$ **אז** $x\in\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}$ **ז"א**

$f(x)=g(x)$**.**

בנוסף $B\subseteq\{x\in A\ |g(x)=h(x)\}$ **אז** $x\in\{x\in A\ |g(x)=h(x)\}$ **ז"א** $g(x)=h(x)$**.**

סה"כ קיבלנו ש $f(x)=h(x)$ **, ולכן** $x\in\{x\in A\ |f(x)=h(x)\}$ **ועל פי הגדרת ההכלה** $B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=h(x)\}$**. על פי הגדרת** R **נקבל ש** $(f,h)\in R$**.**

ב.

אם $B=\phi$ מכיוון שקבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה נקבל שלכל $f,g\in\{0,1\}^A$ $B\subseteq\{x\in A\ |f(x)=g(x)\}$ **ולכן לכל** $f,g\in\{0,1\}^A$ $(f,g)\in R$ **ולכן כל** האיברים נמצאים באותה מחלקת שקילות וסה"כ נקבל ש

$|{\{0,1\}^A}/{R}|=1$.

ג.

מכיוון ש A, B קבוצות סופיות נסמן $|B|=k, |A|=n$.

נבדוק את מספר האיברים במחלקת שקילות אחת.

$[f]=\{g\in\{0,1\}^A \mid B\subseteq\{x\in A \mid f(x)=g(x)\}\}$ ז"א שתי פונקציות שונות במחלקת השקילות רק אם קיים $x\in A\setminus B$ כך ש $f(x)\neq g(x)$ מספר האפשרויות שווה למספר האיברים בקבוצה $\{0,1\}^{A\setminus B}$ מכיוון ש $B\subseteq A$ נקבל ש $|A\setminus B|=|A|-|B|=n-k$, ולכן מספר האיברים בכל מחלקת שקילות הוא 2^{n-k}. כעת מספר האיברים ב $\{0,1\}^A$ הוא 2^n ולכן התשובה היא 2^k.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 4

1. מצאו את עוצמות הקבוצות הבאות:

א. $A=\{f:\mathbb{N}\to\{0,1\}|\forall n\in\mathbb{N}, f(n)\neq f(n+1)\}$

ב. $B=\{f:\mathbb{N}\to\{0,1,2\}|\forall n\in\mathbb{N}, f(n)= f(n+1)\}$

ג. $C=\{f:\mathbb{N}\to\mathbb{N}|\forall n\in\mathbb{N}, \sum_{i=0}^{5} f(n+i)=17\}$

2. תהי $D=\{f:\mathbb{N}\to\{0,1,2\}|\forall n\in\mathbb{N}, f(n)\neq f(n+1)\}$.

א. הוכיחו ש- $|D|>\aleph_0$.

ב. מצאו $|D|$.

<u>פתרון</u>

1א. נשים לב שאם $f(1)=1$ נקבל אפשרות אחת $f(1)=1, f(2)=0, f(3)=1,....$.
ואם $f(1)=0$ נקבל אפשרות אחת $f(1)=0, f(2)=1, f(3)=0,....$ סה"כ קיבלנו שתי אפשרויות לכן $|A|=2$.

ב. $f(1)=1$ נקבל אפשרות אחת $f(1)=1, f(2)=1, f(3)=1,....$ באותו אופן נקבל אפשרות אחת כאשר $f(1)=0$ ואפשרות אחת כאשר $f(1)=2$ סה"כ קיבלנו שלוש אפשרויות. לכן $|B|=3$.

ג. נתון שלכל $n\in N$ $\sum_{i=0}^{5} f(n+i)=17$ מכיוון שהנתון נכון לכל $n\in N$ מתקיים גם $\sum_{i=0}^{5} f(n+1+i)=17$ כעת

$0=\sum_{i=0}^{5} f(n+1+i)-\sum_{i=0}^{5} f(n+i)= f(n+6)-f(n)$ ז"א לכל $n\in N$

$f(n)=f(n+6)$, ולכן צריך לחשב את מספר האפשרויות לקבל $\sum_{i=0}^{5} f(i)=17$ ראינו בהרצאה שאם $f(i)\geq 0$ לכל $1\leq i\leq 5$ אז מספר האפשרויות הוא $\binom{22}{17}$. במקרה שלנו $f(i)\geq 1$ לכל $1\leq i\leq 5$ ולכן מספר האפשרויות זהה למקרה ש $\sum_{i=0}^{5} f(i)=11$ כאשר $f(i)\geq 0$ לכל $1\leq i\leq 5$ ולכן התשובה היא $\binom{16}{11}$.

2א.

נסמן $F=\{f:2N\to\{0,1\}\}$ מכיוון ש $|F|=2^{\aleph_0}=\aleph>\aleph_0$ מספיק להראות ש $|F|\le|D|$.

נגדיר פונקציה $h:F\to D$ באופן הבא: עבור $f\in F$ נסמן $h(f)=g$ כאשר $g(n)=\begin{cases} f(n) & n \quad even \\ 2 & else \end{cases}$ מכיוון ש $\forall n\in N, f(n)\neq 2$ נקבל ש $g\in D$.

נוכיח ש $h:F\to D$ היא פונקציה חח"ע.

יהיו $f_1,f_2\in F$ כך ש $h(f_1)=h(f_2)$ ונוכיח ש $f_1=f_2$ נניח בשלילה ש $f_1\neq f_2$ ז"א קיים $n\in 2N$ כך ש $f_1(n)\neq f_2(n)$ ומהגדרת h נקבל ש

$$h(f_1)(n)=f_1(n)\neq f_2(n)=h(f_2)(n)$$

ולכן $h(f_1)\neq h(f_2)$ בסתירה להנחה ש $h(f_1)=h(f_2)$.

הערה: ניתן היה להוכיח סעיף זה בעזרת שיטת האלכסון הראשונה של קנטור.

ב. לפי סעיף א, $|D|\ge\aleph$. מצד שני $|D|\le|\{0,1,2\}^{\mathbb{N}}|=3^{\aleph_0}=2^{\aleph_0}=\aleph$ לכן לפי ק.ש.ב $|D|=\aleph$.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 5

תהי A קבוצה לא ריקה. משולש ב-$A\times A$ הינו תת קבוצה מהצורה $\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1)\}$ כאשר $a_1,a_2,a_3\in A$, $a_1\neq a_2,a_1\neq a_3,a_2\neq a_3$.

א. הוכיחו שאם יחס R על A הוא טרנזיטיבי ואנטי סימטרי אז R לא מכיל משולש.

ב. הוכיחו שקיים יחס $R\subseteq A\times A$ שלא מכיל משולש כך שלכל יחס $S\subseteq A\times A$ המקיים $R\subset S$ (הכלה ממש) מתקיים ש-S מכיל משולש. במילים אחרות, R יחס שאינו מכיל משולש ומקסימלי ביחס להכלה.

פתרון

א.נניח בשלילה ש R מכיל משולש ז"א $\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1)\}\subseteq R$.
כעת, R יחס טרנזיטיבי ולכן $\{(a_2,a_3),(a_3,a_1)\}\subseteq R$ גורר ש- $(a_2,a_1)\in R$.
מכיוון ש $(a_1,a_2)\in R$ ומכיוון ש R יחס אנטי סימטרי נקבל ש $a_1=a_2$ בסתירה לנתון ש $a_1\neq a_2$.

ב. נגדיר קבוצה $\Omega=\{R\subseteq A\times A \mid R \text{ לא מכיל משולש}\}$. מכיוון ש A לא קבוצה ריקה אז קיים לפחות איבר אחד ב A. יהי $x\in A$ הקבוצה $\{(x,x)\}$ לא מכילה משולש ולכן $\Omega\neq\phi$. (אגב, גם $\phi\in\Omega$ ולכן ההוכחה תקפה גם למקרה בו A קבוצה ריקה). נגדיר יחס $\leq$ על Ω, לכל $R_\alpha,R_\beta\in\Omega$ $R_\alpha\leq R_\beta\Leftrightarrow R_\alpha\subseteq R_\beta$ ראינו בהרצאה שהיחס הנ"ל הוא יחס סדר חלקי.

נבחר שרשרת כלשהי ב Ω $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$.

נתבונן ב $R=\bigcup_{\alpha\in I}R_\alpha$ ונראה ש $R\in\Omega$ ז"א R לא מכיל משולש.

נניח בשלילה ש R מכיל משולש ז"א $\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1)\}\subseteq R$
על פי הגדרת האיחוד קיים $\alpha\in I$ כך ש $(a_1,a_2)\subseteq R$, קיים $\beta\in I$ כך ש $(a_2,a_3)\subseteq R$ וקיים $\gamma\in I$ כך ש $(a_1,a_3)\subseteq R$ מכיוון ש $\{R_\alpha\}_{\alpha\in I}$ שרשרת ב Ω ניתן להניח ב.ה.ג.כ ש $R_\alpha\leq R_\beta\leq R_\gamma$ על פי הגדרת היחס החלקי נקבל ש $R_\alpha\subseteq R_\beta\subseteq R_\gamma$ על פי הגדרת ההכלה נקבל ש $\{(a_1,a_2),(a_2,a_3),(a_3,a_1)\}\subseteq R_\gamma$ בסתירה לכך ש $R_\gamma\in\Omega$, ולכן $R\in\Omega$.
על פי הגדרת האיחוד לכל $\alpha\in I$ נקבל ש $R_\alpha\subseteq R$ ועל פי הגדרת היחס סדר $R_\alpha\leq R$ ז"א *R* חסם מלעיל.

מהלמה של צורן נקבל שיש ב Ω איבר מקסימאלי, נסמנו ב T.
כעת נניח שקיים $T \subset S$ שלא מכיל משולש מהגדרת היחס החלקי על Ω נקבל ש $T \leq S$ ומכיוון ש $T \neq S$ נקבל סתירה למקסימאליות של T ב Ω.

ענה בפירוט בדף זה

שאלה 6

1. מטילים 9 קוביות משחק שונות.
   א. בכמה מההטלות האפשריות ישנן בדיוק 3 קוביות שמראות את המספר 6?
   ב. בכמה מההטלות האפשריות לא קיים אף מספר כך ש-3 קוביות בדיוק מראות אותו? נמקו את תשובתכם.
   ג. בכמה מההטלות האפשריות יש לפחות מספר אחד, כך ש-3 קוביות בדיוק מראות אותו?

פתרון

א. מספר האפשרויות לבחור את שלושת הקוביות שיראו את הספרה 6 הוא $\binom{9}{3}$ מספר האפשרויות לשאר הקוביות הוא 5^6

ולכן סה"כ האפשרויות $\binom{9}{3}\cdot 5^6$.

ב. נסמן: $A_j=$\{המספר j מופיע בדיוק 3 פעמים\} כאשר $1\le j\le 6$, כל האפשרויות $U=$.

יש לחשב את $\left|U-\bigcup_{i=1}^{6}A_i\right|$, נשתמש בעקרון ההכלה והדחה.

מסעיף א נקבל ש $\left|A_j\right|=\binom{9}{3}\cdot 5^6$ כאשר $1\le j\le 6$.

נחשב את $\left|A_i\cap A_j\right|$ כאשר $1\le i<j\le 6$. מספר האפשרויות לבחור את שלושת הקוביות שיראו את הספרה j הוא $\binom{9}{3}$ כעת מספר האפשרויות לבחור את שלושת הקוביות שיראו את הספרה i הוא $\binom{6}{3}$ ולשאר הקוביות יש 4^3 אפשרויות.

ולכן $\left|A_i\cap A_j\right|=\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 4^3$.

נחשב את $\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|$ כאשר $1\le i<j<k\le 6$. כמו עבור $\left|A_i\cap A_j\right|$ אבל לשלושת הקוביות שנשארו יש רק אפשרות אחת הספרה k ולכן $\left|A_i\cap A_j\cap A_k\right|=\binom{9}{3}\binom{6}{3}$.

ומעיקרון ההכלה והדחה נקבל ש

$$\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| = 6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6 - \binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 4^3 + \binom{6}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$$

ולכן $\left|U - \bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| = 6^9 - 6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6 + \binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 4^3 - \binom{6}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$.

ג. כמו בסעיף ב רק יש לחשב את $\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right|$ ולכן התשובה היא:

$$\left|\bigcup_{i=1}^{6} A_i\right| = 6\cdot\binom{9}{3}\cdot 5^6 - \binom{6}{2}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}\cdot 4^3 + \binom{6}{3}\cdot\binom{9}{3}\cdot\binom{6}{3}$$