מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר אחיה בר-און

מועד א', סמסטר א', תשע"ח

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

לפניכם שש שאלות. יש לענות על ארבע שאלות לכל היותר.[1]

<u>על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.</u>[2]

1. (25 נק') נתבונן בפסוקים הבאים בתחשיב היחסים. הוכיחו או הפריכו:

א. $((\exists x Q(x)) \wedge (\exists x P(x))$ שקול לוגית ל-$\exists x(P(x) \wedge Q(x))$.

ב. $((\forall x Q(x)) \wedge (\forall x P(x))$ שקול לוגית ל-$\forall x(P(x) \wedge Q(x))$.

2. (25 נק') נגדיר יחס S מעל קבוצת המספרים הממשיים, כדלקמן: xSy אמ"מ $x-y$ מספר רציונלי.

א. הוכיחו כי S יחס שקילות.

ב. הוכיחו כי $|[\pi]_S| = |[3.14]_S|$.

3. (25 נק') נניח R יחס שקילות מעל קבוצה כלשהי A.

נגדיר פונקציה $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(A)$ ע"י הכלל: $f(X) := R[X]$.

א. הוכיחו כי f חח"ע אמ"מ f על.

ב. נניח כי בקבוצת המנה $A/_R$ יש 3 איברים. הוכיחו כי ל-f יש 8 נקודות שבת.

4. (25 נק') נניח כי $(L,<)$ קבוצה סדורה קווית. הוכיחו כי אם L סופית, אז $(L,<)$ סדורה היטב.

5. (25 נק') תורת הגרפים:

א. נניח (V,E) גרף קשיר. נניח $W \subseteq V$ ומתקיים כי W וגם $V \setminus W$ אינן ריקות.
הוכיחו כי קיימים $w \in W$ ו- $v \in V \setminus W$ כך ש-$\{v,w\} \in E$.

ב. נסחו במדויק את משפט Hall.

6. (40 נק') נניח A ו-B קבוצות. תהי $\mathcal{F}$ קבוצת כל הפונקציות $f : a \to B$ כך ש- $a \subseteq A$ ו-f חח"ע.

א. הוכיחו כי $\mathcal{F}$ איננה ריקה.

ב. הוכיחו כי אם C שרשרת בקס"ח $(\mathcal{F}, \subseteq)$, אז $\bigcup C$ פונקציה חח"ע מתת-קבוצה של A ל-B.

ג. הוכיחו כי לפחות אחד מהבאים מתקיים:

- קיימת פונקציה חח"ע מ-A ל-B,
- קיימת פונקציה מ-A על B.

בהצלחה!

[1] במידה ופתרתם יותר מארבע שאלות, ולא ציינתם אילו ארבע מהן לבדוק, ייבדקו הארבע הראשונות.
[2] להזכירכם, לא ניתן להוכיח באמצעות דוגמה. בכל מקרה בו תבקשו להפריך טענה, עליכם לספק דוגמא נגדית מפורשת.

פתרון לדוגמה

1. נציג נימוק פורמלי, על אף שפתרונות הרבה פחות פורמליים קיבלו ניקוד גבוה:

א. נראה כי הפסוק $(\exists xP(x))\wedge(\exists xQ(x))$ **אינו** שקול לוגית ל־$\exists x(P(x)\wedge Q(x))$.

כדוגמה נגדית, נעבוד מעל המספרים הטבעיים, ניקח יחס $P(x)$ המביע כי x זוגי, ו־$Q(x)$ המביע כי x אי־זוגי.

ערך האמת של $\exists xP(x)$ הוא T, למשל, כי ערך האמת של $P(0)$ הוא T.

ערך האמת של $\exists xQ(x)$ הוא T, למשל, כי ערך האמת של $Q(1)$ הוא T.

מהגדרת טבלת האמת של הקשר $\wedge$ כעת נובע כי ערך האמת של $(\exists xP(x))\wedge(\exists xQ(x))$ הוא T.

מאידך, ערך האמת של $\exists x(P(x)\wedge Q(x))$ הוא F, היות ואחרת, קיים מספר טבעי x שהוא גם זוגי וגם אי־זוגי.

ב. נראה כי הפסוק $(\forall xP(x))\wedge(\forall xQ(x))$ **אכן** שקול לוגית ל־$\forall x(P(x)\wedge Q(x))$.

◄ נניח כי ערך האמת של $(\forall xP(x))\wedge(\forall xQ(x))$ הוא T.

בפרט ערך האמת של $\forall xP(x)$ הוא T וגם ערך האמת של $\forall xQ(x)$ הוא T.

יהי x כלשהו. מההנחה מתקיים כי ערך האמת של $P(x)$ הוא T וגם ערך האמת של $Q(x)$ הוא T. לכן, ערך האמת של $P(x)\wedge Q(x)$ הוא T. כיוון ש־x היה שרירותי, נובע כי ערך האמת של $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ הוא T.

► נניח כי ערך האמת של $\forall x(P(x)\wedge Q(x))$ הוא T.

יהי x כלשהו. מההנחה, ערך האמת של $P(x)\wedge Q(x)$ הוא T. בפרט, ערך האמת של $P(x)$ הוא T.

כיוון ש־x היה שרירותי, נובע כי ערך האמת של $\forall xP(x)$ הוא T.

מאותו שיקול, נסיק כי ערך האמת של $\forall xQ(x)$ הוא T.

מהגדרת טבלת האמת של הקשר $\wedge$ כעת נובע כי ערך האמת של $(\forall xP(x))\wedge(\forall xQ(x))$ הוא T.

2. כזכור, מגדירים יחס S מעל קבוצת המספרים הממשיים, כדלקמן: xSy אמ"מ $x-y$ מספר רציונלי.

א. נוכיח כי S מהווה יחס שקילות.

- רפלקסיביות: נניח x ממשי כלשהו. נבקש להראות כי xSx.
  אכן, היות ו־ $x-x=0$ ו־$0=\frac{0}{1}$ מספר רציונלי, נקבל xSx.
- סימטריות: נניח נתון $(x,y)\in S$. נבקש להראות כי $(y,x)\in S$.
  מההנחה, קיים מספר רציונלי q כך ש־ $x-y=q$.
  אז $-q$ רציונלי, ומתקיים $y-x=-q$. לכן $(y,x)\in S$.
- טרנזיטיביות: נניח נתונים $(x,y)\in S,(y,z)\in S$. נבקש להראות כי $(x,z)\in S$.
  מההנחה, קיימים מספרים רציונליים q_1,q_2 כך ש־$x-y=q_1$ ו־ $y-z=q_2$.
  אז q_1+q_2 רציונלי ומתקיים $x-z=(x-y)+(y-z)=q_1+q_2$. לכן $(x,z)\in S$.

ב. היות ו־$\frac{314}{100}=3.14$ מספר רציונלי, מתקיים כי $3.14\ S\ 0$, ואזי $\mathbb{Q}=[0]_S=[3.14]_S$.

לכן, כדי להראות כי $|[\pi]_S|=|[3.14]_S|$, נגדיר פונקציה $f:\mathbb{Q}\to[\pi]_S$ ע"י הכלל:

$$f(q)=\pi-q.$$

לכל x ממשי מתקיים $x\in[\pi]_S$ אמ"מ $x-\pi$ רציונלי אמ"מ $x=\pi-q$ עבור $q\in\mathbb{Q}$ כלשהו.

לכן f מוגדרת היטב והיא על.

כמו כן, f חח"ע משום ששיוויון $f(q)=f(q')$ גורר $\pi-q=\pi-q'$ ו־$q=q'$.

3. כזכור, R יחס שקילות מעל קבוצה כלשהי A, ומגדירים פונקציה $f:\mathcal{P}(A)\to\mathcal{P}(A)$ ע"י הכלל: $f(X):=R[X]$.

א. מהגדרת f, נובע כי $f(\emptyset) = \emptyset$ ו־$f(A) = A$, ולכן ניתן להניח כי ב־A יש לפחות שני איברים (אחרת סיימנו).
כמו־כן, מהגדרת f, לכל $x \in A$, מתקיים $f(\{x\}) = R[\{x\}] = \{z \mid xRz\} = [x]_R$.
◄ נניח f חח"ע. בפרט, לכל $x \neq y$ מ־A מתקיים $f(\{x\}) \neq f(\{y\})$, כלומר $[x]_R \neq [y]_R$, ולכן $\neg xRy$.
הראנו כי לכל $x \neq y$ לא מתקיים xRy, ולכן לכל x מתקיים $[x]_R = \{x\}$, כלומר, R הוא יחס הזהות.
מכאן כי הפונקציה f היא פונקציית הזהות: לכל $X \in \mathcal{P}(A)$, $f(X) = R[X] = X$. בפרט, f היא על.
► נניח f על. בפרט, לכל $x \in A$ קיים $X \in \mathcal{P}(A)$ כך ש־$f(X) = \{x\}$. היות ו־$f(\emptyset) = \emptyset$, X איננה ריקה.
היות ו־R יחס רפלקסיבי, לכל $y \in X$ מתקיים $y \in R[X] = f(X) = \{x\}$, ומכאן נובע כי $X = \{x\}$.
הראנו כי לכל x ב־A מתקיים $f(\{x\}) = \{x\}$, ולכן R הוא יחס הזהות ו־f היא פונקציית הזהות, ובפרט חח"ע.

ב. היות ו־R יחס שקילות, לכל $x, z \in A$ מתקיים xRz אמ"מ $z \in [x]_R$.
לכן, אם C מחלקת שקילות מ־A/R, אז לכל $x \in C$ ו־$z \in A$ מתקיים xRz אמ"מ $z \in C$.
מכאן, כי לכל מחלקת שקילות C מ־A/R, מתקיים

$$R[C] = \{z \in A \mid \exists x \in C \ xRz\} = C.$$

כעת, נניח C_1, C_2, C_3 שלוש מחלקות שקילות שונות מ־ A/R. בפרט המחלקות זרות בזוגות, ואזי לכל שתי תת־קבוצות שונות I, J של $\{1,2,3\}$ מתקיים $\bigcup_{i \in I} C_i \neq \bigcup_{j \in J} C_j$. לכן

$$\left| \left\{ \bigcup_{i \in I} C_i \;\middle|\; I \subseteq \{1,2,3\} \right\} \right| = |\mathcal{P}(\{1,2,3\})| = 2^3 = 8.$$

תהי $I \subseteq \{1,2,3\}$ שרירותית. אז

$$f\left(\bigcup_{i \in I} C_i\right) = R\left[\bigcup_{i \in I} C_i\right] = \bigcup_{i \in I} R\left[C_i\right] = \bigcup_{i \in I} C_i,$$

כלומר $\bigcup_{i \in I} C_i$ מהווה נקודת שבת של f.
סה"כ: הדגמנו קיומן של 8 נקודות שבת של f.

4. כזכור, $(L, <)$ סדורה היטב אמ"מ היא קס"ח ולכל תת־קבוצה לא ריקה של L יש איבר ראשון לפי $<$.

נעזר בעקרון אינדוקציה שלמה כדי להוכיח כי לכל n טבעי, אם $(L, <)$ קבוצה סדורה קווית בת n איברים, אז $(L, <)$ סדורה היטב.

נניח n טבעי ומתקיים כי כל קבוצה סדורה קווית בת פחות מ־n איברים היא סדורה היטב. עוד נניח כי נתונה קבוצה סדורה קווית $(L, <)$ בת n איברים. נבקש להראות כי $(L, <)$ סדורה היטב.

ברור כי $(L, <)$ קס"ח. כעת, תהי A תת־קבוצה לא ריקה של L. נבקש להראות כי יש לה איבר ראשון לפי $<$.

ננצל את העובדה ש־A לא ריקה ונבחר $a \in A$ כלשהו.

◁ אם שיחק לנו המזל ו־a מהווה איבר ראשון של $(A, <)$, הרי שסיימנו.

◁ אם a איננו ראשון, נבחר $b \in A \setminus \{a\}$ כך ש־$\neg(a < b)$. כיוון ש־$(A, <)$ סדורה קווית, נסיק כי $b < a$.

כעת, כיוון ש־ $(A \setminus \{a\}, <)$ קבוצה סדורה קווית בת פחות מ־n איברים, הרי שמההנחה אודות n נובע כי היא סדורה היטב. בפרט, כיוון ש־$A \setminus \{a\}$ לא ריקה (יעיד על כך b), קיים לה איבר ראשון c.

מתקיים $c < b < a$ או $c = b < a$ ואזי, מטרנזיטיביות, $c < a$. לכן, סה"כ, c איבר ראשון ב־$(A, <)$.

5. תורת הגרפים:

א. היות ו־W וגם $V \setminus W$ אינן ריקות, נבחר (באופן שרירותי) $x \in W$ ו־$y \in V \setminus W$.
היות ו־(V, E) גרף קשיר, נוכל למצוא מסלול $(v_0, \ldots, v_n)$ כך ש־$v_0 = x$ ו־$v_n = y$.
היות ו־$v_0 \in W$ ו־$v_n \notin W$, קיים $i < n$ **אחרון** כך ש־$v_i \in W$.
מבחירת i, נקבל כי $v_i \in W$ ו־$v_{i+1} \in V \setminus W$. מההגדרה של מסלול מתקיים $\{v_i, v_{i+1}\} \in E$, כמבוקש.

ב. משפט Hall: נניח (V,E) גרף דו־צדדי עם פירוק המעיד על כך $V = A \uplus B$.

נניח קיים n טבעי כך ש־$|A| = n = |B|$. אז הבאים שקולים:

- קיימת פונקציה $f : A \leftrightarrow B$ כך ש־$f(a) \in \Gamma(a)$ לכל $a \in A$;
- לכל $X \subseteq A$, מתקיים $|X| \le |\Gamma(X)|$.

6. (40 נק') נניח A ו־B קבוצות. תהי $\mathcal{F}$ קבוצת כל הפונקציות $f : a \to B$ כך ש־ $a \subseteq A$ ו־f חח"ע.

א. הקבוצה הריקה $\emptyset$ היא פונקציה חח"ע מ־$\emptyset$ ל־B. לכן $\emptyset \in \mathcal{F}$, ובפרט $\mathcal{F}$ איננה ריקה.

ב. נניח C שרשרת בקס"ח $(\mathcal{F}, \subseteq)$. נסמן

$$g := \bigcup C = \{x \mid \exists f \in C(x \in f)\}.$$

נבקש להראות כי g פונקציה חח"ע מתת־קבוצה של A ל־B.

לכל $f \in C$ מתקיים $f \subseteq A \times B$, ולכן $g = \bigcup C \subseteq A \times B$.

נראה כי g חד־ערכית: נניח $(a,b_1),(a,b_2) \in g$. נבקש להראות כי $b_1 = b_2$.

מהגדרת g, נוכל למצוא $f_1, f_2 \in C$ כך ש־$(a,b_1) \in f_1$ ו־$(a,b_2) \in f_2$.

היות ו־C שרשרת ביחס ל־$\subseteq$, ניתן להניח בה"כ כי $f_1 \subseteq f_2$.

אז $(a,b_1),(a,b_2) \in f_2$. היות ו־f_2 פונקציה נובע כי $b_1 = b_2$.

סה"כ: g יחס חד־ערכי מ־A ל־B ולכן היא פונקציה מתת־קבוצה של A ל־B.

נראה כי g חד־חד־ערכית: נניח $(a_1,b),(a_2,b) \in g$. נבקש להראות כי $a_1 = a_2$.

מהגדרת g, נוכל למצוא $f_1, f_2 \in C$ כך ש־$(a_1,b) \in f_1$ ו־$(a_2,b) \in f_2$.

היות ו־C שרשרת ביחס ל־$\subseteq$, ניתן להניח בה"כ כי $f_1 \subseteq f_2$.

אז $(a_1,b),(a_2,b) \in f_2$. היות ו־f_2 פונקציה חח"ע נובע כי $a_1 = a_2$.

ג. נבקש להראות כי קיימת פונקציה חח"ע מ־A ל־B, או קיימת פונקציה מ־A על B.

מעקרון המקסימום של האוסדורף, תהי C שרשרת מקסימלית בקס"ח $(\mathcal{F}, \subseteq)$.

מהסעיף הקודם, $g := \bigcup C$ היא פונקציה חח"ע מתת־קבוצה של A ל־B.

◁ אם $\mathrm{dom}(g) = A$, הרי ש־g פונקציה חח"ע מ־A ל־B, וסיימנו.

◁ נניח כי $\mathrm{dom}(g) \neq A$. נבקש להראות כי $\mathrm{Im}(g) = B$, ואזי g פונקציה מ־A על B, ובכך נסיים.

נניח בשלילה כי $\mathrm{Im}(g) \neq B$, אז סה"כ נוכל לבחור $a \in A \setminus \mathrm{dom}(g)$ וגם $b \in B \setminus \mathrm{Im}(g)$.

אז $h := g \uplus \{(a,b)\}$ שייכת ל־$\mathcal{F}$, ו־ $C \uplus \{h\}$ שרשרת המרחיבה ממש את C, בסתירה למקסימליות.