

מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר אחיה בר-און

מועד ב', סמסטר א', תשע"ח

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

לפניכם שש שאלות. יש לענות על ארבע שאלות לכל היותר.¹

על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.²

1. (25 נק') ציירו דיאגרמת הסה של 5 יחסי סדר שונים מעל הקבוצה $\{0, 1, 2\}$.

2. (25 נק') הראו כי הפסוק $\exists! x P(x)$ שקול לוגית לפסוק בתחשיב היחסים ללא הכמתים $\exists!$ ו- \exists .

3. (25 נק') נניח A קבוצה.

בהנתן פונקציה $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, נגדיר יחס \sim_f מעל A כדלקמן: $x \sim_f y$ אם $f(x) = f(y)$.

א. הוכיחו כי לכל בחירה של פונקציה $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$, מתקיים כי יחס שקילות מעל A .

ב. הוכיחו כי לכל יחס שקילות R מעל A , קיימת פונקציה $f: A \rightarrow \mathcal{P}(A)$ עבורה $\sim_f = R$.

4. (25 נק') נניח A, B קבוצות זרות וקיימת פונקציה חח"ע ועל $f: A \rightarrow B$.

א. הציגו פונקציה חח"ע ועל $g: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$.

ב. הציגו פונקציה חח"ע ועל $h: A \cup B \rightarrow A \times B$.

(בשני הסעיפים, יש להוכיח כי הפונקציה שהגדרתם היא אכן חח"ע ועל.)

5. (25 נק') תורת הגרפים:

א. נניח n טבעי. חשבו את מספר הקשתות בגרף השלם K_n .

ב. נניח (V, E) גרף המכיל נקודה מבודדת. הוכיחו כי הגרף המשלים (V, \bar{E}) קשיר.

6. (40 נק') בהנתן יחס R מעל קבוצת המספרים השלמים \mathbb{Z} , נגדיר סדרת יחסים $\langle R_n \mid n \in \mathbb{N} \rangle$ ברקורסיה:

$$R_0 := R \bullet$$

$$\bullet \text{ לכל } n \text{ טבעי, } R_{n+1} := R_n \cup (R_n \circ R_n)$$

$$\text{נסמן } R_\infty := \bigcup_{n=0}^{\infty} R_n$$

הוכיחו כי לכל n טבעי, קיים יחס R מעל \mathbb{Z} כך שמתקיים $R_n \neq R_\infty$ וגם $R_{n+1} = R_\infty$.

בהצלחה!

¹במידה ופתרתם יותר מארבע שאלות, ולא ציינתם אילו ארבע מהן לבדוק, ייבדקו הארבע הראשונות.
²להזכירכם, לא ניתן להוכיח באמצעות דוגמה.