בס"ד

מבחן במתמטיקה בדידה תשע"ז סמסטר קיץ מועד א

מרצים: ד"ר ארז שיינר וד"ר אפי כהן.

משך המבחן: שלוש שעות.

חומר עזר: מחשבון פשוט.

הוראות הפעלה:

יש לענות **בפירוט** על כל חמשת השאלות, **כל תשובה מופיעה במקומה בשאלון**. המחברות משמשות לטיוטה בלבד, **ולא יבדקו**.

שימו לב: כל שאלה שווה 20 נקודות.

שאלה	ציון
1	
2	
3	
4	
5	

ציון:

בהצלחה

שאלה 1

סעיף א (5 נקודות)

מי מהפסוקים הבאים הוא טאוטולוגיה? נמקו!

i. $(p\leftrightarrow q)\wedge(q\leftrightarrow r)\rightarrow(p\leftrightarrow r)$.

ii. $(p\uparrow q)\wedge(q\uparrow r)\rightarrow(p\uparrow r)$

(זכרו כי $p\uparrow q=\neg(p\wedge q)$)

סעיף ב (15 נקודות)

תהיינה A,B קבוצות כלשהן הוכיחו/הפריכו את הטענות הבאות:

i. $P(A)\subseteq P(B)\Leftrightarrow A\subseteq B$.

ii. $P(A)\in P(B)\Leftrightarrow A\in B$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

תשובה לשאלה 1

<u>סעיף א1</u>

טאוטולוגיה. נובע במידי מכללי היסק.

<u>סעיף א2</u>

לא טאוטולוגיה. עבור ההצבה $p=T\wedge r=T$, $q=F$

נקבל כי $p\uparrow r=F$ וגם $(p\uparrow q)\wedge(q\uparrow r)=T$.

שזה גורר כי הפסוק בסעיף א2 שקרי.

<u>סעיף ב1</u>

נכון. הוכחה

$\Leftarrow$

נתון ש $A\subseteq B$. יהי $C\in P(A)$. על פי הגדרת קבוצת החזקה $C\subseteq A$.

נתון $A\subseteq B$ ולכן $C\subseteq B$. על פי הגדרת קבוצת החזקה $C\in P(B)$.

הוכחנו שאם $C\in P(A)$ אז $C\in P(B)$ ז"א $P(A)\subseteq P(B)$.

$\Rightarrow$

נתון ש $P(A)\subseteq P(B)$. יהי $x\in A$ על פי הגדרת ההכלה $\{x\}\subseteq A$. על פי הגדרת קבוצת החזקה $\{x\}\in P(A)$. על פי הנתון $P(A)\subseteq P(B)$ נקבל $\{x\}\in P(B)$. על פי הגדרת קבוצת החזקה $\{x\}\subseteq B$ ועל פי הגדרת ההכלה $x\in B$. הוכחנו שאם $x\in A$ אז $x\in B$ ז"א $A\subseteq B$.

סעיף ב2

לא נכון. דוגמה נגדית

$A=\{1\},B=\{\{1\}\}$. $P(A)=\{\varnothing,\{1\}\},P(B)=\{\varnothing,\{\{1\}\}\}$.

שימו לב: $A\in B$ אבל $P(A)\notin P(B)$.

שאלה 2

סעיף א (10 נקודות)

תהיינה A,B,C,D קבוצות ו $f:A\to B, g:B\to C, h:C\to D$ פונקציות.
הוכח או הפרך, ע"י דוגמה נגדית, כל אחד מהסעיפים הבאים:

i. $h\circ g\circ f$ על גורר ש $g\circ f$ על.

ii. $g\circ f$ הפיכה ו $h\circ g$ הפיכה גורר ש g הפיכה.

סעיף ב (10 נקודות)

תהיינה A,B קבוצות. נגדיר $f:P(A)\to P(B)$ ע"י $f(X)=X\cap B$
הוכיחו כי f חח"ע אם ורק אם $A\subseteq B$.

הערה: אין קשר בין סעיף א לסעיף ב

תשובה לשאלה 2

<u>סעיף א1</u>

לא נכון. דוגמה נגדית

$A=B=C=\{1,2\}, D=\{1\}$

$f:A\to B \quad g:B\to C \quad h:C\to D$

$f(x)=x \quad g(x)=1 \quad h(x)=1$

$h\circ g\circ f:A\to D$, $h\circ g\circ f(x)=1$ פונקציה על אבל הפונקציה $g\circ f:A\to C$, $g\circ f(x)=1$ לא על.

<u>סעיף א2</u>

נכון.

$g\circ f$ הפיכה, ולכן $g\circ f$ פונקציה על ולפי טענה מהרצאה g על.

$h\circ g$ הפיכה, ולכן $h\circ g$ חח"ע ולפי טענה מהרצאה g חח"ע.

סה"כ g חח"ע ועל ז"א g הפיכה.

<u>סעיף ב</u>

$\Rightarrow$

$f:P(A)\to P(B)$. יהי $X\in P(A)$ על פי הגדרת קבוצת חזקה

$X\subseteq A$ נתון ש $A\subseteq B$, ולכן $X\subseteq B \Leftarrow X\cap B=X$.

$f(X)=X\cap B \Leftarrow f(X)=X$. קיבלנו את פונקציה חח"ע.

$\Leftarrow$

אם $A=\varnothing$ סיימנו כי קבוצה ריקה מוכלת בכל קבוצה.

נניח ש $A\neq\varnothing$.

יהי $x\in A$. על פי הגדרת קבוצת החזקה $\{x\}\in P(A)$.

$f(\{x\})=\{x\}\cap B$.

אם $\{x\}\cap B=\varnothing$ אז נקבל סתירה לחח"ע כי $\varnothing\in P(A)$ ואז $f(\varnothing)=\varnothing\cap B=\varnothing$. סה"כ נקבל $f(\{x\})=f(\varnothing)$ בסתירה לחח"ע.

סה"כ נקבל ש $\{x\}\cap B=\{x\}$ כלומר $x\in B$.

שאלה 3 (20 נקודות)

א. תנו דוגמה לקבוצה $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$.

ב. תהי $A\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in A$ מתקיים כי $X\cap Y=\phi$, הוכיחו כי A בת מנייה.

ג. תהי $B\subseteq\mathbb{N}$ ותהי $C\subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in C$ מתקיים $X\cap Y=B$. הוכיחו כי C בת מנייה.

ד. תהי $D\subseteq P(\mathbb{N})$ כך שלכל שתי קבוצות שונות $X,Y\in D$ מתקיים כי $|X\cap Y|\leq 10$. הוכיחו ש D בת מניה.

<u>רמז</u>: הביטו ב $\bigcup_{B\in I} D_B$, כאשר

$D_B=\{X\in D\mid B\subseteq X\}$, $I=\{X\in P(\mathbb{N}):|X|=10\}$.

תשובה לשאלה 3

<u>סעיף א</u>

$A=\{\{1\},\{2\},\{3\}\}$

<u>סעיף ב</u>

מספיק להראות שיש פונקציה חח"ע $f:A\to\mathbb{N}\cup\{0\}$.

לכל $0\neq X\in A$ נקבל ש $X\in P(\mathbb{N})$ כלומר $X\subseteq\mathbb{N}$ ולכן קיים לו איבר קטן ביותר. נסמן אותו ב n_X , ונגדיר $f(X)=n_x$.

כמו כן, נגדיר $f(\phi)=0$.

כל האיברים ב A זרים, ולכן f חח"ע.

סה"כ קיבלנו ש A בת מניה.

<u>סעיף ג</u>

נבנה פונקציה $g:C\to P(\mathbb{N})$ המוגדרת ע"י $g(X)=X\setminus B$.

ואז $\operatorname{Im}g\subseteq P(\mathbb{N})$ קבוצה שכל איבריה זרים. על פי סעיף ב $\operatorname{Im}g$ בת מניה.

נשאר להוכיח ש g חח"ע. נניח ש $g(X)=g(Y)$ כלומר $X\setminus B=Y\setminus B$.

אם $a\in X$ אז יש לנו שתי אפשרויות:

אפשרות 1: $a\in B$. על פי הגדרת D_B נקבל ש $Y\cap X=B$.

$a\in X$ וגם $a\in B$ אם $a\notin Y$ נקבל סתירה לשוויון $Y\cap X=B$.

אפשרות 2: $a\notin B$ ואז $a\in X\setminus B$. נתון ש $X\setminus B=Y\setminus B$ ולכן $a\in Y\setminus B$ ועל פי הגדרת ההפרש $a\in Y$.

הוכחנו ש $X\subseteq Y$. באותו אופן בדיוק אפשר להוכיח ש $Y\subseteq X$.

סה"כ נקבל ש $X=Y$ כדרוש.

<u>סעיף ד</u>

תהי $B\in I$ כלומר $|B|=10$.

ברור כי לכל $X\neq Y\in D_B$ מתקיים כי $B\subseteq X\cap Y$ וכיוון ש $|X\cap Y|\leq 10$ נובע כי החיתוך בין כל שתי קבוצות שונות ב D_B הוא בדיוק B (כלומר $X\cap Y=B$).

לכן לפי סעיף ג' מתקיים כי D_B בת מנייה.

נסמן ב $E=\{X\in D:|X|\leq 9\}$. ברור כי $D=E\cup\left(\bigcup_{B\in I}D_B\right)$ הרי כל קבוצה ב D מכילה קבוצה כלשהי בגודל 10, או שהיא בעצמה בגודל שקטן ממש מ10.

כיוון שאוסף **כל הקבוצות הסופיות** של הטבעיים הוא בן מנייה, נובע כי E,I בנות מנייה וסה"כ D היא איחוד בן מנייה של קבוצות בנות מנייה.

שאלה 4

סעיף א (10 נקודות)

הוכיחו שלכל קבוצה A מתקיים $|P(A)|>|A|$.

סעיף ב (10 נקודות)

נגדיר יחס S על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ באופן הבא:

$$\forall (x_1,y_1),(x_2,y_2)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}:\left((x_1,y_1)S(x_2,y_2)\leftrightarrow x_1=x_2\right)$$

i. הוכיחו ש S הוא יחס שקילות.

ii. מצאו את מחלקות השקילות $\left[(0,1)\right]_S,\left[(1,-3)\right]_S$ ואת מחלקת השקילות הכללית $\left[(a,b)\right]_S$, כאשר $a,b\in\mathbb{R}$.

iii. כתבו את קבוצת המנה $\mathbb{R}\times\mathbb{R}/S$. מהי המשמעות הגיאומטרית של קבוצת המנה? (כאשר אנו מסתכלים על $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$ בתור המישור).

תשובה לשאלה 4

סעיף א

תהיי A קבוצה כלשהי נוכיח תחילה ש $|A|\neq|P(A)|$.

נוכיח שלא קיימת פונקציה מ A על $P(A)$.

תהיי $f:A\to P(A)$ אז לכל $a\in A$ נקבל ש $f(a)\subseteq A$.

קיימות שתי אפשרויות: אפשרות 1: $a\in f(a)$ אפשרות 2: $a\notin f(a)$.

תהיי $B=\{a\in A|a\notin f(a)\}$. נניח שקיים $b\in A$ כך ש $f(b)=B$.

אם $b\in B$ נקבל לפי הגדרת B ש $b\notin f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

אם $b\notin B$ נקבל מהגדרת B ש $b\in f(b)$ בסתירה לכך ש $f(b)=B$.

קיימת פונקציה חח"ע $f:A\to P(A)$ $f(a)=\{a\}$.

סה"כ נקבל $|A|\neq|P(A)|$ וגם $|P(A)|\geq|A|$ כלומר $|P(A)|>|A|$.

סעיף ב1

רפלקסיביות

יהי $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}$. $x=x$ ולכן $(x,y)S(x,y)$.

סימטריות

נניח ש $(x_1,y_1)S(x_2,y_2)$. על פי הגדרת היחס S נקבל ש $x_1=x_2$ ואז $x_2=x_1$ ושוב על פי הגדרת היחס S נקבל $(x_2,y_2)S(x_1,y_1)$.

טרנזיטיביות

נניח ש $(x_1,y_1)S(x_2,y_2)$ וגם $(x_2,y_2)S(x_3,y_3)$. על פי הגדרת היחס S נקבל $x_1=x_2$ וגם $x_2=x_3$ כלומר $x_1=x_3$ ושוב על פי הגדרת היחס S נקבל $(x_1,y_1)S(x_3,y_3)$ כדרוש.

סעיף ב2

$$\left[(0,1)\right]_S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x=0\right\},\left[(1,-3)\right]_S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x=1\right\}$$

$$\left[(a,b)\right]_S=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}\,|\,x=a\right\}.$$

סעיף ב3

$\mathbb{R}\times\mathbb{R}/S=\left\{[a]_S\,\middle|\,a\in\mathbb{R}\right\}$. אוסף כל הישרים שמקבילים לציר ה y.

שאלה 5

<u>סעיף א (10 נקודות)</u>

תהי $f:A\to A$ ותהי $B\subseteq A$. נגדיר סדרת קבוצות ע"י $A_1=B\setminus f\left[f^{-1}[B]\right]$, $A_{n+1}=A_n\cup f^{-1}[A_n]$. הוכיחו באינדוקציה כי לכל n מתקיים $A_n\cap\mathrm{Im}(f)=\phi$.

<u>סעיף ב (10 נקודות)</u>

הוכיחו או הפריכו את הטענות הבאות:

i. בגרף מסדר n לא יתכן שסכום דרגות כל קדקודיו יהיה: n^2+n.

ii. קיים גרף מסדר 6 שדרגות קדקודיו הן: 1,2,3,4,4,5.

iii. לכל גרף עם מסלול אוילר ניתן להוסיף צלע ולקבל גרף עם מעגל אוילר.

תשובה לשאלה 5

<u>סעיף א</u>

בסיס האינדוקציה:

עבור $n=1$

$A_1=B\setminus f\left[f^{-1}[B]\right]$.

אם $y\in\mathrm{Im}\,f$ אז קיים $x\in A$ כך ש $f(x)=y$.

אפשרות 1: $y\in B$ ואז $y\in f\left[f^{-1}[B]\right]\leftarrow x\in f^{-1}[B]$ על פי הגדרת ההפרש $y\notin A_1\leftarrow y\notin B\setminus f\left[f^{-1}[B]\right]$.

אפשרות 2: $y\notin B$ ואז על פי הגדרת ההפרש $y\notin A_1\leftarrow y\notin B\setminus f\left[f^{-1}[B]\right]$.

הראינו שאם $y\in\mathrm{Im}\,f$ אז בהכרח $y\notin A_1$, ולכן $A_1\cap\mathrm{Im}(f)=\phi$.

שלב האינדוקציה:

נניח ש $A_n\cap\mathrm{Im}(f)=\phi$ צ"ל $A_{n+1}\cap\mathrm{Im}(f)=\phi$.

$$A_{n+1}\cap\mathrm{Im}(f)=\left(A_n\cup f^{-1}[A_n]\right)\cap\mathrm{Im}(f)=\left(A_n\cap\mathrm{Im}\,f\right)\cup\left(f^{-1}[A_n]\cap\mathrm{Im}\,f\right)=\varnothing\cup\left(f^{-1}[A_n]\cap\mathrm{Im}\,f\right)$$

נשאר להראות ש $f^{-1}[A_n]\cap\mathrm{Im}\,f=\varnothing$.

נניח ש $y\in f^{-1}[A_n]$.

$y\in f^{-1}[A_n]$ ז"א קיים $x\in A_n$ כך ש $f(y)=x$. קיבלנו $x\in A_n\cap\mathrm{Im}\,f$

בסתירה לכך ש $A_n\cap\mathrm{Im}(f)=\phi$ ז"א $f^{-1}[A_n]=\varnothing$. ואז $f^{-1}[A_n]\cap\mathrm{Im}\,f=\varnothing$

כדרוש.

הערה: ניתן להוכיח בדרך נוספת: להוכיח ש $A_1 = A_n$ לכל n טבעי.

סעיף ב 1

נכון. בגרף מסדר n דרגת כל קדקוד הוא לכל היותר $n-1$ אז סכום הדרגות הוא לכל היותר $n(n-1)=n^2-n$ ועבור n טבעי נקבל

$$n^2-n<n^2+n$$

סעיף ב2

לא. סכום הדרגות בגרף לא מכוון חייב להיות זוגי.

סעיף ב3

לא נכון. דוגמה נגדית. גרף עם שני קדקודים וצלע אחת.