

מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר אחיה בר-און

מועד א', סמסטר א', תשע"ט

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 20 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.

1. (20 נק') קבעו עבור כל אחד מהפסוקים הבאים האם הוא מהווה טאוטולוגיה או סתירה. ספקו הסבר תמציתי.

א.
$$\left((\neg(p_0)) \rightarrow (\neg(p_1)) \right) \rightarrow \left(\left((\neg(p_0)) \rightarrow (p_1) \right) \rightarrow (p_0) \right)$$

ב.
$$\left((p_0) \rightarrow \left((p_1) \rightarrow (p_2) \right) \right) \rightarrow \left(\left((p_0) \rightarrow (p_1) \right) \rightarrow \left((p_0) \rightarrow (p_2) \right) \right)$$

2. (20 נק') נגדיר יחס R מעל קבוצת הפונקציות $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כדלקמן:

לכל $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f R g$ אם"מ $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) \neq g(n)\}$ סופית.

א. הוכיחו כי R מהווה יחס שקילות מעל $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$.

ב. נתבונן בקבוצות $[I]_R$ ו- $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}/R$. קבעו והוכיחו מי מהן בת-מניה ומי לא.

3. (20 נק') נסמן $A := \mathbb{N} \setminus \{0\}$. נגדיר יחס R מעל A כדלקמן:

לכל $n, m \in A$, $n R m$ אם"מ n מחלק את m ללא שארית.

א. הוכיחו כי R מהווה יחס סדר חלש מעל A .

ב. תהי A_0 קבוצת האיברים המינימליים ב- (A, R) . חשבו את A_0 .

ג. תהי A_1 קבוצת האיברים המינימליים ב- $(A \setminus A_0, R)$. חשבו את A_1 .

ד. תהי A_2 קבוצת האיברים המינימליים ב- $(A \setminus (A_0 \cup A_1), R)$. חשבו את A_2 .

4. (20 נק') תהי $\{p_0, p_1, p_2, \dots\}$ מניה עולה של כל המספרים הראשוניים.

נגדיר פונקציה $h: \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathcal{P}(\mathbb{N})$ כדלקמן. לכל $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$:

$$h(f) := \{p_0^{f(0)} \cdot p_1^{f(1)} \cdot \dots \cdot p_n^{f(n)} \mid n \in \mathbb{N} \wedge n \geq 2\}$$

א. הוכיחו כי h חח"ע.

ב. הוכיחו כי h אינה על.

5. (20 נק') הוכיחו מבלי להסתמך על אקסיומת הבחירה (או אחד העקרונות השקולים אליה):

נניח A קבוצה סופית ו- R יחס סדר חלש מעל A . אז ב- (A, R) יש אנטי-שרשרת מקסימלית.

6. (20 נק') הוכיחו:

א. נניח $a \leq b$ ו- $c \leq d$ עוצמות. אז $a^c \leq b^d$.

ב. $2^{\aleph_0} = 3^{\aleph_0}$.

בהצלחה!