

מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר אחיה בר-און

מועד ב', סמסטר א', תשע"ט

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 20 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

על התשובות להיות מפורטות ומנומקות.

1. (20 נק') מצאו פסוק φ במשתנים A, B, C שטבלת האמת שלו היא כדלקמן:

A	B	C	φ
T	T	T	F
T	T	F	F
T	F	T	T
T	F	F	F
F	T	T	T
F	T	F	F
F	F	T	F
F	F	F	T

2. (20 נק') נגדיר יחס R מעל קבוצת הפונקציות $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כדלקמן:

לכל $f, g \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $f R g$ אם"מ $\{n \in \mathbb{N} \mid f(n) > g(n)\}$ סופית.

א. הוכיחו כי R רפלקסיבי וטרנזיטיבי.

ב. הוכיחו כי R אינו אנטי-סימטרי.

ג. לכל $n \in \mathbb{N}$, נתבונן בפונקציה הקבועה $c_n : \mathbb{N} \rightarrow \{n\}$.

הוכיחו כי קיימת פונקציה $f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ כך שלכל $n \in \mathbb{N}$, מתקיים $c_n R f$.

3. (20 נק') עבור מספר טבעי n , פונקציה $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ נקראת מונוטונית יורדת אם"מ לכל $m < m' < n$ מתקיים

$f(m) > f(m')$. נסמן $\mathcal{F} := \bigcup_{n \in \mathbb{N}} \{f \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}} \mid f \text{ מונוטונית יורדת}\}$. הוכיחו:

א. ב- (\mathcal{F}, \subseteq) אין שרשרת אינסופית.

ב. ב- (\mathcal{F}, \subseteq) יש אנטי-שרשרת אינסופית.

4. (20 נק') נניח A קבוצה ו- $f : A \rightarrow A$ פונקציה המקיימת $f \circ f = f$.

הוכיחו כי f חח"ע אם"מ f על.

5. (20 נק') הוכיחו מבלי להסתמך על אקסיומת הבחירה (או אחד העקרונות השקולים אליה):

נניח A בת-מניה. אז קיים יחס R מעל A כך ש- (A, R) קבוצה סדורה היטב.

6. (20 נק') נניח n מספר טבעי חיובי. נסמן $\mathcal{F} := \{f \in \mathbb{Q}^{\mathbb{Q}} \mid \forall q \in \mathbb{Q} \mid f^{-1}\{q\} \mid = n\}$.

חשבו את $|\mathcal{F}|$.

בהצלחה!