

מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר עידו פלדמן

תש"פ, סמסטר א', מועד א'

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על 4 שאלות בלבד. במידה ולא תציינו אחרת, ייבדקו 4 השאלות הראשונות שבמחברת.

משקל כל שאלה: 28 נקודות. ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

על התשובות להיות מנומקות ומפורטות.

1. מצאו פסוק φ במשתנים A, B, C שטבלת האמת שלו היא כדלקמן:

| A | B | C | φ |
|-----|-----|-----|-----------|
| T | T | T | T |
| T | T | F | T |
| T | F | T | F |
| T | F | F | T |
| F | T | T | F |
| F | T | F | T |
| F | F | T | F |
| F | F | F | F |

2. נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A := \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$, כדלקמן:

לכל $a, b \in A$, aRb אם a ל- a יש אותה קבוצת מחלקים ראשוניים כמו ל- b .

למשל, מתקיים $36 R 18$, ולא מתקיים $18 R 9$.

א. הוכיחו כי R מהווה יחס שקילות מעל A .

ב. מצאו תיאור של מחלקת השקילות של 77.

ג. חשבו את העוצמה של קבוצת המנה A/R .

3. נניח A קבוצה אינסופית. נסמן ב- \mathcal{F} את קבוצת כל יחסי הסדר (חלש) מעל A .

נניח כי C שרשרת מקסימלית בקס"ח (\mathcal{F}, \subseteq) . נסמן $R^* := \bigcup C$. הוכיחו או הפריכו:

א. $R^* \neq \emptyset$.

ב. (A, R^*) קבוצה סדורה חלקית במובן החלש.

ג. (A, R^*) קבוצה סדורה קווית.

ד. (A, R^*) קבוצה סדורה היטב.

4. נניח A קבוצה לא-ריקה ו- $f : A \rightarrow A$ פונקציה.

לכל n טבעי חיובי, נסמן ב- f^n את הפונקציה $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$ הוכיחו או הפריכו:

א. f חח"ע אם לכל מספר טבעי $n > 3$ מתקיים f^n חח"ע.

ב. f על אם קיים מספר טבעי $n > 3$ כך ש- f^n על.

5. חשבו את העוצמות הבאות:

א. $|\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}|$.

ב. $|\mathbb{Q} \setminus \mathbb{Z}|$.

6. חשבו את הסגור הטריזיטיבי של $\{(a, 2a) \mid a \in \mathbb{Z}\}$ וקבעו האם הזוג הסדור $(1, 3)$ שייך אליו.

בהצלחה!