

מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, מר עידו פלדמן

תש"פ, סמסטר א', מועד ב'

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על 4 שאלות בלבד. במידה ולא תציינו אחרת, ייבדקו 4 השאלות הראשונות שבמחברת.

משקל כל שאלה: 28 נקודות. ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

על התשובות להיות מנומקות ומפורטות.

1. נעבוד בתחשיב היחסים עם יחס דו-מקומי  $P$ .

לכל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו/הפריכו כי היא מהווה טאוטולוגיה:

א.  $(\forall x \exists y P(x, y)) \rightarrow (\exists x \forall y P(x, y))$

ב.  $(\exists x \forall y P(x, y)) \rightarrow (\forall x \exists y P(x, y))$

2. נגדיר יחס  $R$  מעל הקבוצה  $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$ , כדלקמן:

לכל  $a, b \in A$ ,  $aRb$  אם"מ קבוצת ההפרש הסימטרי  $a \Delta b$  היא סופית.

א. הוכיחו כי  $R$  מהווה יחס שקילות מעל  $A$ .

ב. מצאו תיאור של מחלקת השקילות של  $\emptyset$ .

ג. חשבו את העוצמה של קבוצת המנה  $A/R$ .

3. ציירו דיאגרמת הסה של 5 יחסי סדר שונים מעל הקבוצה  $\mathbb{Z}$ .

4. עבור פונקציה  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  טבעי חיובי, נסמן ב- $f^n$  את הפונקציה  $\underbrace{f \circ \dots \circ f}_n$  פעמים  $n$ .

א. הציגו פונקציה  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימת לכל  $n$  טבעי חיובי,  $\text{Im}(f^n) \supsetneq \text{Im}(f^{n+1})$ .

ב. הציגו פונקציה  $f : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$  המקיימת  $\text{Im}(f) \supsetneq \text{Im}(f^2) \supsetneq \text{Im}(f^3) = \text{Im}(f^4)$ .

5. נניח  $A, B$  קבוצות זרות ומתקיים  $|A| = |B|$ .

א. הציגו פונקציה חח"ע ועל  $f : \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(B)$ .

ב. הציגו פונקציה חח"ע ועל  $g : A \cup B \leftrightarrow A \times B$ .

(בשני הסעיפים, יש להוכיח כי הפונקציה שהגדרתם היא אכן חח"ע ועל.)

6. נסמן ב- $A$  את קבוצת כל הפונקציות מ- $\mathbb{R}$  ל- $\mathbb{R}$ . נגדיר יחס  $\preceq$  מעל  $A$ , כדלקמן:

לכל  $f, g \in A$ ,  $f \preceq g$  אם"מ לכל  $x \in \mathbb{R}$  מתקיים  $f(x) \leq g(x)$ .

הוכיחו או הפריכו:

א.  $(A, \preceq)$  קבוצה סדורה חלקית.

ב.  $(A, \preceq)$  קבוצה סדורה קווית.

ג.  $(A, \preceq)$  סריג.

בהצלחה!