מתמטיקה בדידה, 88-195

פרוף' אסף רינות, מר עידו פלדמן

תש"פ, סמסטר א', מועד ב'

1. נעבוד בתחשיב היחסים עם יחס דו-מקומי P.

לכל אחת מהנוסחאות הבאות, הוכיחו/הפריכו כי היא מהווה טאוטולוגיה:

א. $(\forall x\exists y P(x,y)) \to (\exists x\forall y P(x,y))$.

ב. $(\exists x\forall y P(x,y)) \to (\forall x\exists y P(x,y))$.

תמצית הפתרון: הנוסחאות אינן טאוטולוגיה. נפריך על ידי מתן דוגמאות נגדיות מעל מרחב המדגם $\{0,1\}$:

א. $P := \{(0,0),(1,1)\}$.

ב. $P := \{(0,0),(0,1)\}$.

2. נגדיר יחס R מעל הקבוצה $A := \mathcal{P}(\mathbb{N})$, כדלקמן:

לכל $a,b \in A$, aRb אמ"מ קבוצת ההפרש הסימטרי $a\triangle b$ היא סופית.

א. הוכיחו כי R מהווה יחס שקילות מעל A.

ב. מצאו תיאור של מחלקת השקילות של $\emptyset$.

ג. חשבו את העוצמה של קבוצת המנה A/R.

תמצית הפתרון:

א. **רפלקסיביות**. נניח $a \in A$. נבקש להראות כי מתקיים aRa.

ואכן, כיוון ש-$a\triangle a = \emptyset$ ו-$\emptyset$ קבוצה סופית, מתקיים aRa.

סימטריות. נניח $a,b \in A$ ומתקיים aRb. נבקש להראות כי מתקיים bRa.

מההנחה ומהגדרת היחס R, ידוע כי $a\triangle b$ קבוצה סופית. מסימטריות ההפרש הסימטרי מתקיים $b\triangle a = a\triangle b$.
לכן, מהגדרת היחס R נסיק כי מתקיים bRa.

טרנזיטיביות. נניח $a,b,c \in A$ ומתקיים aRb וכן bRc. נבקש להראות כי מתקיים aRc.

מההנחה ומהגדרת היחס R, ידוע כי $a\triangle b$ ו- $b\triangle c$ קבוצות סופיות.

נשים לב כי מתקיים $a\triangle c \subseteq (a\triangle b)\cup(b\triangle c)$.

[ניתן להראות זאת ישירות מההגדרה, או להשתמש בתכונות של ההפרש הסימטרי:

$$a\triangle c = (a\triangle\emptyset)\triangle c = (a\triangle(b\triangle b))\triangle c = (a\triangle b)\triangle(b\triangle c) \subseteq (a\triangle b)\cup(b\triangle c).]$$

אזי, $a\triangle c$ מוכלת באיחוד של שתי קבוצות סופיות, ולכן היא סופית.

סה"כ, מהגדרת היחס R נסיק כי מתקיים aRc.

ב. מהגדרת מחלקת השקילות ומהגדרת R:

$$[\emptyset]_R = \{a \in A \mid aR\emptyset\} = \{a \in A \mid \text{סופית } a\triangle\emptyset\}.$$

לכל קבוצה a מתקיים $a\triangle\emptyset = a$. מהגדרת A נקבל סך הכל:

$$[\emptyset]_R = \{a \subseteq \mathbb{N} \mid \text{סופית } a\}.$$

ג. נשים לב כי כל מחלקת שקילות C ב-A/R היא מעוצמה $\aleph_0$.
אכן, בהנתן מחלקה C כנ"ל, נבחר נציג $c \in C$ ונגדיר פונקציה $f : C \to [\emptyset]_R$ ע"י הכלל:

$$f(a) := a \triangle c.$$

לכל $a \in C$ מתקיים aRc, ואזי $a \triangle c$ קבוצה סופית של מספרים טבעיים ולכן f מוגדרת היטב.
נגדיר פונקציה $g : [\emptyset]_R \to C$ ע"י הכלל:

$$g(x) := x \triangle c.$$

כל קבוצה x ב-$[\emptyset]_R$ היא סופית, ולכן $g(x) \triangle c = (x \triangle c) \triangle c = x \triangle (c \triangle c) = x$ היא סופית,
ולכן $g(x)Rc$, כלומר g מוגדרת היטב.
יתר על כן, לכל $a \in C$ מתקיים:

$$g(f(a)) = g(a \triangle c) = (a \triangle c) \triangle c = a,$$

ומכאן כי g היא הפונקציה ההופכית של f, ובפרט f חח"ע ועל.
ראינו בכיתה כי קבוצת תת-הקבוצות הסופיות של הטבעיים היא מעוצמה $\aleph_0$, ולכן, $|C| = |[\emptyset]_R| = \aleph_0$.
כעת, נזכר בעובדה שקבוצת המנה A/R מהווה חלוקה של A. לכן, סה"כ:

$$|A| = \left|\biguplus A/R\right| = \aleph_0 \cdot |A/R| = \max\{\aleph_0, |A/R|\}.$$

היות ו $|A| = |\mathcal{P}(\mathbb{N})| = \aleph > \aleph_0$ נסיק כי $\aleph = |A| = |A/R|$.

3. ציירו דיאגרמת הסה של 5 יחסי סדר **שונים** מעל הקבוצה $\mathbb{Z}$.

פתרון אפשרי: לכל n טבעי בין 1 ל-5 נגדיר סידור $<_n$ של השלמים כדלקמן:
$i <_n j$ אמ"מ $(i < j) \wedge (n|(i-j))$.
בדיאגרמת הסה של $<_1$ יש עמודה אחת, כי 1 מחלק כל מספר שלם.
בדיאגרמת הסה של $<_2$ יש שתי עמודות: הזוגיים בנפרד והאי-זוגיים בנפרד.
וכן הלאה.

4. עבור פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ו-n טבעי חיובי, נסמן ב-f^n את הפונקציה $\underbrace{f \circ \cdots \circ f}_{n \text{ פעמים}}$.

א. הציגו פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המקיימת לכל n טבעי חיובי, $\mathrm{Im}(f^n) \supsetneq \mathrm{Im}(f^{n+1})$.

ב. הציגו פונקציה $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ המקיימת $\mathrm{Im}(f) \supsetneq \mathrm{Im}(f^2) \supsetneq \mathrm{Im}(f^3) = \mathrm{Im}(f^4)$.

5. נניח A, B קבוצות זרות ומתקיים $|A| = |B|$.

א. הציגו פונקציה חח"ע ועל $f : \mathcal{P}(A) \leftrightarrow \mathcal{P}(B)$.

ב. הציגו פונקציה חח"ע ועל $g : {}^{A \cup B}A \leftrightarrow {}^{A}A \times {}^{B}B$.

(בשני הסעיפים, יש להוכיח כי הפונקציה שהגדרתם היא אכן חח"ע ועל.)

תמצית הפתרון: ראשית, מההנחה נקבע פונקציית שקילות $h : A \leftrightarrow B$.

א. נגדיר פונקציה $f : \mathcal{P}(A) \to \mathcal{P}(B)$ ע"י הכלל:

$$f(X) := h[X].$$

בהרצאה 21 ניתן למצוא את ההוכחה כי f פונקציה חח"ע ועל.

ב. נגדיר פונקציה $g : {}^{A\cup B}A \leftrightarrow {}^{A}A \times {}^{B}B$ ע"י הכלל:

$$.g(k) := (k \restriction A, h \circ (k \restriction B))$$

לכל פונקציה $k : A \cup B \to A$ מתקיים כי $k \restriction A$ פונקציה מ-A ל-A, $k \restriction B$ פונקציה מ-B ל-A, ו- $h \circ (k \restriction B)$ פונקציה מ-B ל-B. לכן g מוגדרת היטב.

g **חח"ע:**

נניח k_1, k_2 שתי פונקציות שונות מ-$A \cup B$ ל-A. נבקש להראות כי $g(k_1) \neq g(k_2)$.

מההנחה נוכל לבחור $A \cup B \ni x$ כך ש- $k_1(x) \neq k_2(x)$.

- אם $A \ni x$, בפרט $k_1 \restriction A \neq k_2 \restriction A$, ובפרט $g(k_1) \neq g(k_2)$.
- אחרת, אז כיוון ש-h חח"ע, $h(k_1(x)) \neq h(k_2(x))$. בפרט $h \circ (k_1 \restriction B) \neq h \circ (k_2 \restriction B)$, ובפרט $g(k_1) \neq g(k_2)$.

g **על:**

נניח נתונות זוג פונקציות $(i, j) \in {}^{A}A \times {}^{B}B$. נבקש למצוא פונקציה $k : A \cup B \to A$ כך ש- $g(k) = (i, j)$.

נגדיר פונקציה $k : A \cup B \to A$ לפי הכלל:

$$.k(x) := \begin{cases} i(x), & x \in \mathrm{dom}(i) \\ h^{-1}(j(x)), & x \in \mathrm{dom}(j) \end{cases}$$

כיוון ש-h חח"ע ועל, h^{-1} מהווה פונקציה מ-B ל-A. בנוסף: $A \cup B = \mathrm{dom}(i) \uplus \mathrm{dom}(j)$.

לכן k פונקציה מוגדרת היטב, ומתקיים:

$$,g(k) := (k \restriction A, h \circ (k \restriction B)) = (i, h \circ (h^{-1} \circ j)) = (i, j)$$

כמבוקש.

6. נסמן ב-A את קבוצת כל הפונקציות מ-$\mathbb{R}$ ל-$\mathbb{R}$. נגדיר יחס $\preceq$ מעל A, כדלקמן:

לכל $f, g \in A$, $g \preceq f$ אמ"מ לכל $x \in \mathbb{R}$ מתקיים $f(x) \leq g(x)$.

הוכיחו או הפריכו:

א. $(A, \preceq)$ קבוצה סדורה חלקית.

ב. $(A, \preceq)$ קבוצה סדורה קווית.

ג. $(A, \preceq)$ סריג.

בהצלחה!