מתמטיקה בדידה, 88-195

פרופ' אסף רינות, גב' שירה גרינשטיין

תשפ"א, סמסטר א', מועד א'

משך המבחן: שעתיים. בחינות שיוגשו לאחר הזמן המוקצה לכם לא ייבדקו.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על 4 שאלות לכל היותר. במידה ולא תציינו אחרת, ייבדקו 4 השאלות הראשונות שבמחברת.

בחלק מהשאלות תתבקשו לפתור רק n מתוך m סעיפים. במידה ותפתרו יותר, ייבדקו רק n הסעיפים הראשונים.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

על התשובות להיות מנומקות ומפורטות באופן שיאפשר לבודק להתרשם מעומק הידיעה של הנבחן.

הקדמה

היות והמבחן מתקיים באופן מקוון, וכדי להבטיח שכל סטודנט/ית פותר/ת את המבחן באופן עצמאי, השאלות מטה מותאמות לכל אחד מהנבחנים באופן אישי. לשם כך:

- נסמן ב-$\mathcal{M}$ את קבוצת כל הספרות במספר הטלפון האישי שלכם.
- נסמן ב-R את אוסף כל הזוגות (n,m) של ספרות המופיעות במספר הטלפון האישי שלכם כך ש-m מופיע בדיוק לאחר n.

למשל, אם מספר הטלפון שלכם הוא 014-1014334, הרי שמתקבל:

$$\begin{aligned} \mathcal{M} &= \{0,1,3,4\}, \\ R &= \{(0,1),(1,4),(4,1),(1,0),(4,3),(3,3),(3,4)\}. \end{aligned}$$

סטודנטים שלא מעוניינים להתבסס על מספר הטלפון האישי שלהם, יכולים לבחור להתבסס על מספר טלפון פיקטיבי עם סיבוכיות של מספר טלפון טיפוסי. במידה ונזהה מחברות בחינה המתבססות על אותו מספר טלפון או על מספר פשוט מדי, הסטודנטים הרלוונטיים יזומנו לראיונות הערכה כדי להפגין את הידע שלהם בשיחה אישית עם המרצה.

יש לרשום בעמוד הפותח של מחברת הפתרון שלכם את הקבוצה $\mathcal{M}$ ואת היחס R שהתקבלו.

בשאלות הבאות, כל אזכור של $\mathcal{M}$ או R מתייחס לאובייקטים אלה.

השאלון

1. (10 נקודות) תהי $a_0,\dots,a_k$ מניה עולה של המספרים בקבוצה $\mathcal{M}$.

מצאו את המספר הטבעי החיובי הקטן ביותר n עבורו $\frac{n}{a_1}+\cdots+\frac{n}{a_k}$ מהווה מספר שלם.

תמצית הפתרון: בדוגמה שלנו מתקבל $a_0=0$, $a_1=1$, $a_2=3$ ו-$a_3=4$.

ה-n הטבעי החיובי הקטן ביותר עבורו $\frac{n}{a_1}+\frac{n}{a_2}+\frac{n}{a_3}$ מספר שלם הוא 12.

2. (20 נקודות) ענו על **1 מתוך 2** הסעיפים הבאים:

א. הגדירו יחס דו-מקומי $P(x,y)$ כך שמעל מרחב המדגם $\mathcal{M}$ שני הבאים מתקיימים:

- הפסוק $\exists! x\forall y P(x,y)$ מקבל ערך T.
- הפסוק $\forall x\exists! y P(x,y)$ מקבל ערך F.

תמצית הפתרון: נבקש להבטיח את קיומו של $x \in \mathcal{M}$ שמקיים את היחס P עם **כל** איברי $\mathcal{M}$. היות וב-$\mathcal{M}$ יש יותר מאיבר אחד, זה מספיק כדי להבטיח שבפסוק השני נקבל F. בנוסף, נבקש להבטיח שה-x הנ"ל יהיה יחיד, וכך יתקבל גם T בפסוק הראשון.

נבחר למשל את x להיות 3. בהסתמך על הדיון הנ"ל נגדיר את היחס P כדלקמן: $P(x,y)$ אמ"מ $x = 3$.

ב. הגדירו יחס דו-מקומי $Q(x,y)$ כך שמעל מרחב המדגם $\mathcal{M}$ שני הבאים מתקיימים:

- הפסוק $\exists! x \forall y Q(x,y)$ מקבל ערך F.
- הפסוק $\forall x \exists! y Q(x,y)$ מקבל ערך T.

תמצית הפתרון: הדרישה השניה בעצם אומרת ש-Q מגדיר פונקציה מ-$\mathcal{M}$ ל-$\mathcal{M}$. הפונקציה הפשוטה ביותר עליה ניתן לחשוב היא פונקציית הזהות. בדיקה מעלה שזה אכן מקיים את שתי הדרישות. לכן נגדיר את היחס כדלקמן: $Q(x,y)$ אמ"מ $x = y$.

3. (30 נקודות) ענו על **3 מתוך 4** הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו או הפריכו: היחס R טרנזיטיבי.

תמצית הפתרון: בדוגמה שלנו מתקיים $0 \ R \ 1$ ו-$4 \ R \ 1$, אך לא מתקיים $4 \ R \ 0$.

מכאן כי היחס R אינו טרנזיטיבי (הפרכה).

ב. נסמן ב-S את הסגור הטרנזיטיבי של R. חשבו את S.

תמצית הפתרון: פשוט צריך לבדוק, אבל ניתן כאן פתרון מופשט יותר. כזכור, R הוא אוסף כל הזוגות (n,m) של ספרות המופיעות ב-014-1014334 כך ש-m מופיע **בדיוק** לאחר n. לכן הסגור הטרנזיטיבי מכיל <u>לכל הפחות</u> את כל הזוגות (n,m) של ספרות המופיעות ב-014-1014334 כך ש-m מופיע **מתישהו** לאחר n. לכן, נקבל:

$$S \supseteq \left\{ \begin{array}{l} (0,1),(0,4),(0,0),(0,3) \\ (1,4),(1,1),(1,0),(1,3) \\ (4,1),(4,0),(4,4),(4,3) \\ (3,3),(3,4) \end{array} \right\}.$$

בנוסף, ייתכן שיופיע מספר n שמתישהו אחריו מופיע m כאשר m זה מופיע גם קודם לכן ואחריו מופיע איזשהו k. זהו הסוג האחרון של זוגות (n,k) ששייכים ל-S. למשל, במקרה שלנו, יש את 3 שאחריו מופיע 4, ו-4 מופיע גם בהתחלה ומתישהו לאחריו מופיע 0. לכן הזוג $(3,0)$ שייך ל-S. באותו אופן, הזוג $(3,1)$ שייך ל-S.

סה"כ, בדוגמה שלנו, מתקבל כי S הוא היחס המלא מעל $\mathcal{M}$.

ג. הוכיחו או הפריכו: S הוא אנטי-סימטרי.

תמצית הפתרון: בדוגמה שלנו מתקיים $0 \ S \ 1$ ו-$1 \ S \ 0$. כיוון ש- $0 \neq 1$, הרי שהיחס S אינו אנטי-סימטרי.

ד. הוכיחו או הפריכו: $S \cup S^{-1} \cup I_{10}$ מהווה יחס שקילות מעל הקבוצה 10.

(כזכור, I_{10} מסמל את יחס הזהות מעל הקבוצה $10 = \{0,\ldots,9\}$.)

תמצית הפתרון: פשוט צריך לבדוק, אבל ניתן כאן פתרון מופשט שעובד ללא תלות ב-$\mathcal{M}$.

שמנו לב כי S מכיל לכל הפחות את כל הזוגות (n,m) של ספרות במספר הטלפון כך ש-m מופיע מתישהו **לאחר** n. לכן S^{-1} מכיל לכל הפחות את כל הזוגות (n,m) של ספרות במספר הטלפון כך ש-m מופיע מתישהו **לפני** n. מכאן כי האיחוד $S \cup S^{-1}$ מכיל לכל הפחות את כל הזוגות (n,m) של ספרות במספר הטלפון כך ש-m שונה מ-n. מכאן כי $S \cup S^{-1} \cup I_{\mathcal{M}}$ הוא היחס המלא מעל $\mathcal{M}$.

ברור כי $I_{10} = I_{\mathcal{M}} \uplus I_{10 \setminus \mathcal{M}}$. לכן $S \cup S^{-1} \cup I_{10} = (S \cup S^{-1} \cup I_{\mathcal{M}}) \uplus I_{10 \setminus \mathcal{M}}$ מהווה איחוד זר של שני יחסי שקילות: היחס המלא מעל $\mathcal{M}$ ויחס הזהות מעל $10 \setminus \mathcal{M}$. אז, מטענה שראינו בהרצאה 13, איחוד זה מהווה יחס שקילות מעל האיחוד, הוא 10.

מסקנה: $S \cup S^{-1} \cup I_{10}$ אכן מהווה יחס שקילות מעל 10.

4. (30 נקודות) ענו על **2 מתוך 3** הסעיפים הבאים:

א. חשבו את העוצמה של הקבוצות $\mathcal{M}\times\mathcal{M}$ ו- ${}^{\mathcal{M}}\mathcal{M}$.

תמצית הפתרון: $|\mathcal{M}\times\mathcal{M}|=|\mathcal{M}|\cdot|\mathcal{M}|=4\cdot 4=16$, ו- $|{}^{\mathcal{M}}\mathcal{M}|=|\mathcal{M}|^{|\mathcal{M}|}=4^4=64$.

ב. לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, נסמן ב-$\mathcal{F}_X$ את קבוצת כל הפונקציות $f:\mathbb{Z}\xrightarrow{\text{על}}X$.

לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, חשבו את העוצמה של $\mathcal{F}_X$.

תמצית הפתרון: עבור X ריקה, אין פונקציה מ- $\mathbb{Z}$ על $\emptyset$, ואזי $|\mathcal{F}_\emptyset|=0$.

עבור $X=\{x\}$ יחידון, $\mathcal{F}_X$ מכילה (כאיבר) אך ורק את הפונקציה הקבועה $f:\mathbb{Z}\to\{x\}$ שהיא כמובן על.

לכן $|\mathcal{F}_X|=1$ לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ שהוא יחידון.

מעתה ועד סוף פתרון הסעיף, נניח כי $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ תת-קבוצה בת שני איברים לכל הפחות.

מתקיים $\mathcal{F}_X\subseteq{}^{\mathbb{Z}}X$, ולכן $|\mathcal{F}_X|\leq|X|^{\aleph_0}=\aleph$.

נראה כי מתקיים $|X|^{\aleph_0}\leq|\mathcal{F}_X|$ ונסיק (ממשפט קנטור-ברנשטיין-שרדר) כי $|\mathcal{F}_X|=\aleph$.

נקבע איבר כלשהו x^* ב-X. כעת, לכל פונקציה $f:(\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N})\to X$ נגדיר פונקציה $\hat{f}:\mathbb{Z}\to X$ המרחיבה אותה ע"י הכלל הבא:

$$\hat{f}(k):=\begin{cases}f(k) & k\in\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}\\ k & k\in X\\ x^* & \text{אחרת}\end{cases}.$$

לכל $k\in X$ מתקיים $\hat{f}(k)=k$, ולכן סה"כ $\hat{f}$ היא על X. בנוסף, כיוון ש- $\hat{f}$ מרחיבה את f, ההתאמה $f\mapsto\hat{f}$ מהווה פונקציה חח"ע מ- ${}^{\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}}X$ ל- $\mathcal{F}_X$. לכן $|X|^{\aleph_0}\leq|\mathcal{F}_X|$, כמבוקש.

ג. לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, נסמן ב-$\mathcal{G}_X$ את קבוצת כל הפונקציות $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ עם התכונה שלכל מספר טבעי n, $(g(n)-n)$ שייך לקבוצה X.

לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$, חשבו את העוצמה של $\mathcal{G}_X$.

תמצית הפתרון: עבור X ריקה, אין פונקציה כנדרש ואזי $|\mathcal{G}_\emptyset|=0$.

עבור $X=\{x\}$ יחידון, $\mathcal{G}_X$ מכילה אך ורק את הפונקציה $g:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ המקיימת $g(n)=n+x$ לכל n טבעי.

לכן $|\mathcal{G}_X|=1$ לכל $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ שהוא יחידון.

מעתה ועד סוף פתרון הסעיף, נניח כי $X\in\mathcal{P}(\mathcal{M})$ תת-קבוצה בת שני איברים לכל הפחות.

מתקיים $\mathcal{G}_X\subseteq{}^{\mathbb{N}}\mathbb{N}$, ולכן $|\mathcal{G}_X|\leq{\aleph_0}^{\aleph_0}=\aleph$. נראה כי מתקיים $|X|^{\aleph_0}\leq|\mathcal{G}_X|$ ונסיק כי $|\mathcal{G}_X|=\aleph$.

לכל פונקציה $g:\mathbb{N}\to X$ נגדיר פונקציה $\hat{g}:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ע"י הכלל:

$$\hat{g}(n):=n+g(n).$$

ברור (ולכן לא נפרט כאן) כי ההתאמה $g\mapsto\hat{g}$ מהווה פונקציה חח"ע מ- ${}^{\mathbb{N}}X$ ל- $\mathcal{G}_X$. לכן $|X|^{\aleph_0}\leq|\mathcal{F}_X|$.

5. (30 נקודות) נגדיר יחס $\lhd$ מעל הקבוצה $A:=\mathbb{N}\setminus\{0\}$, כדלקמן:

$$\lhd:=\{(a,b)\in A\times A\mid \exists n\in\mathbb{N}\exists m\in\mathcal{M}\ (n>1\ \wedge\ m>1\ \wedge\ b=a\cdot n\cdot m)\}.$$

ענו על **3 מתוך 4** הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\lhd$ מהווה יחס סדר חזק מעל A.

תמצית הפתרון: כפי שראינו בהרצאה 14, מספיק להראות כי $\lhd$ טרנזיטיבי ואנטי-רפלקסיבי מעל A.

קל לוודא (ולכן נשמיט כאן) כי כל אימת שמתקיים $a\lhd b$ מתקיים גם $a<b$, ולכן היחס $\lhd$ אנטי-רפלקסיבי. כעת, נתמקד בהוכחת הטרנזיטיביות. נניח נתונים זוגות $(a,b),(b,c)\in\lhd$. נבקש להראות כי $(a,c)\in\lhd$.

כיוון ש- $a\lhd b$, נוכל לקבוע $n\in\mathbb{N}$ ו-$m\in\mathcal{M}$ גדולים מ-1 כך ש- $b=a\cdot n\cdot m$.

כיוון ש- $b\lhd c$, נוכל לקבוע $n'\in\mathbb{N}$ ו-$m'\in\mathcal{M}$ גדולים מ-1 כך ש- $c=b\cdot n'\cdot m'$.

נסמן $n'':=n\cdot m\cdot n'$ ו- $m'':=m'$.

אז n'' מספר טבעי גדול מ-1, m'' איבר של $\mathcal{M}$ גדול מ-1, ומתקיים $c=a\cdot n''\cdot m''$. בפרט, $a\lhd c$, כמבוקש.

ב. הוכיחו או הפריכו: הקס"ח $(A, \lhd)$ מהווה סריג.

תמצית הפתרון: נימוק פשוט (שאנו משמיטים כאן) מבסס כי שני האיברים בתת-הקבוצה $B := \{1,2\}$ הם מינימליים בקס"ח, ולכן אין לתת-הקבוצה B חסם תחתון. מכאן נסיק כי הקס"ח הנדון אינו סריג.

ג. הוכיחו או הפריכו: בקס"ח $(A, \lhd)$ יש שרשרת מקסימלית סופית.

תמצית הפתרון: נניח C שרשרת סופית כלשהי בקס"ח הנדון. נראה כי היא אינה מקסימלית.

אם C ריקה, אז בוודאי שהיא אינה מקסימלית, כי כל יחידון מהווה שרשרת. לכן ניתן להניח כי C שרשרת סופית, לא ריקה. אזי, כפי שראינו בהרצאה 18, קיים ל-C איבר אחרון, נסמנו ב-a. יהי m האיבר המקסימלי (לפי הסדר הרגיל של הטבעיים) ב- $\mathcal{M}$. בפרט m גדול מ-1. נסמן $b := a \cdot m \cdot m$. היות ו-a שייך ל-A, a שונה מ-0, ואזי b שונה מ-a. מהגדרת היחס $\lhd$, מתקיים $a \lhd b$.

כיוון ש-a איבר אחרון ב-C, נובע מהטרנזיטיביות של $\lhd$ כי $c \lhd b$ לכל $c \in C$. סה"כ $C \cup \{b\}$ שרשרת המרחיבה ממש את C, ולכן האחרונה אינה מקסימלית.

ד. הוכיחו או הפריכו: בקס"ח $(A, \lhd)$ יש אנטי-שרשרת מקסימלית סופית.

תמצית הפתרון: נניח A אנטי-שרשרת סופית כלשהי בקס"ח הנדון. נראה כי היא אינה מקסימלית. כיוון ש-A סופית ויש אינסוף מספרים ראשוניים, נוכל לקבוע מספר ראשוני p הגדול (לפי הסדר הרגיל של הטבעיים) מכל איברי A. נימוק פשוט (שאנו משמיטים כאן) מבסס כי $A \cup \{p\}$ אנטי-שרשרת המרחיבה ממש את A, ולכן האחרונה אינה מקסימלית.

6. (40 נקודות) נגדיר יחס $\sim$ מעל הקבוצה ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$, כדלקמן:

$$\sim := \{(f,g) \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \times {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \mid \forall q \in \mathbb{Q}\ (f(q) \in \mathcal{M}) \leftrightarrow (g(q) \in \mathcal{M})\}.$$

ענו על **כל** הסעיפים הבאים:

א. הוכיחו כי $\sim$ מהווה יחס שקילות מעל ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$.

ב. נגדיר פונקציה $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{R}$ ע"י הכלל הבא:

$$f(q) := \begin{cases} 3 & q \in \mathbb{Z} \\ \pi & q \notin \mathbb{Z} \end{cases}.$$

תנו תיאור של מחלקת השקילות $[f]_\sim$ וחשבו את עוצמתה.

תמצית הפתרון: בדוגמה שלנו, 3 שייך ל- $\mathcal{M}$, ולכן $[f]_\sim = \{g \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \mid \forall q \in \mathbb{Q}\ (g(q) \in \mathcal{M}) \leftrightarrow (q \in \mathbb{Z})\}$.
במידה ו-3 לא היה שייך ל-$\mathcal{M}$, היה מתקבל $[f]_\sim = \{g \in {}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \mid \forall q \in \mathbb{Q}\ (g(q) \notin \mathcal{M})\}$.
בשני המקרים, ניתן להגדיר פונקציה $H : [f]_\sim \to \mathbb{R}$ ע"י הכלל

$$H(g) := g\left(\frac{1}{2}\right),$$

ולוודא כי זוהי פונקציה על (אנו משמיטים את הפרטים). לכן (כפי שראינו בהרצאה 24), מתקבל אי השוויון $\aleph = |\mathbb{R}| \leq |[f]_\sim|$. בנוסף, ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R} \subseteq [f]_\sim$ ולכן $|[f]_\sim| \leq \aleph^{\aleph_0} = \aleph$.
סה"כ, $|[f]_\sim| = \aleph$.

ג. חשבו את העוצמה של קבוצת המנה ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim$.

תמצית הפתרון: נקבע איבר כלשהו $x \in \mathcal{M}$ ואיבר כלשהו $y \in \mathbb{R} \setminus \mathcal{M}$.
לכל שתי פונקציות **שונות** $f, g \in {}^{\mathbb{Q}}\{x,y\}$ לא קשה לוודא כי מתקיים $f \not\sim g$ (אנו משמיטים את הפרטים). לכן, ההתאמה $[f]_\sim \mapsto f$ מהווה פונקציה חח"ע מ- ${}^{\mathbb{Q}}\{x,y\}$ ל- ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim$. בפרט, $\aleph = 2^{\aleph_0} = |{}^{\mathbb{Q}}\{x,y\}| \leq \left|{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim\right|$.

למעשה, ההתאמה הנ"ל היא גם פונקציה על, אבל במקום לבדוק זה פשוט נעיר כי כיוון ש- ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim$ מהווה חלוקה של ${}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}$ מתקיים $\aleph = \aleph^{\aleph_0} = |{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}| \geq \left|{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim\right|$.

סה"כ $\aleph = \left|{}^{\mathbb{Q}}\mathbb{R}/_\sim\right|$.