

## בחינה בקורס תורת הקבוצות (88-202-01) - מועד א

אוניברסיטת בר-אילן, יום ב', כ"ז שבט תשע"ב (20.2.12 למ')

**מרצה:** בועז צבאן.

**מתרגלים:** יפית נתני, חיים שרגא רוזנר.

**משך הבחינה:** שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

### הנחיות

**א.** השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטייטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

**ב.** המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך":

הניקוד על כל שאלה הוא עד 36 נקודות.

עד 12 נקודות בונים יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	ניקוד
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

**בהרה:** גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

**בהצלחה!**

## שאלה 1

תהי  $A$  קבוצה סדורה היטב.

א. הוכח שלכל קבוצה  $B, B \subseteq A$  איזומורפית לרישא של  $A$ . (18 נקודות)

ב. תן דוגמא לקבוצה סדורה היטב  $A$  וקבוצה  $B \subseteq A$  כך שלכל  $a \in A$ , הקבוצה  $B$  אינה איזומורפית לרישא  $\text{seg}(a)$  של  $A$ . נמק את טענותיך. (18 נקודות)

**תשובה:**

## שאלה 2

תהי  $A$  קבוצה אינסופית, ותהי  $B \subseteq A$ . הוכח, או הפרך על ידי דוגמא נגדית, כל אחת מהטענות הבאות:

א. אם  $|B| < |A|$ , אז  $|A \setminus B| = |A|$ . (18 נקודות)

ב. אם  $|A \setminus B| = |A|$ , אז  $|B| < |A|$ . (18 נקודות)

תשובה:

### שאלה 3

יהי  $\kappa$  מונה אינסופי, ותהי  $h$  פונקציית בחירה על  $P(\kappa) \setminus \{\emptyset\}$ . נגדיר, ברקורסיה על  $\alpha > \kappa$ , פונקציה  $f: \kappa \rightarrow \mathbb{R}$  על ידי:

$$f(\alpha) = \begin{cases} \frac{1}{7} & \alpha = 0 \\ 5 \cdot f(h(\alpha))^3 & \alpha > 0 \end{cases}$$

הוכח כי לכל  $\alpha < \kappa$  מתקיים  $0 < f(\alpha) < 1$ . (36 נקודות)

(רמז: למעשה, מעט יותר מזה נכון.)

**תשובה:**