= פתרון בחינת תורת הק', 20.2.12 =

1. א. משפט מההרצאה, ראו הוכחה בספר האו"פ.

ב. ניקח $B=A=\mathbb{N}$ עם הסדר הרגיל.
לכל $a\in\mathbb{N}$, $seg(a)$ סופית ולכן $B\not\cong seg(a)$. //

2. א. הוכחה: $B\subseteq A$, לכן, $A=(A\setminus B)\cup B$ (איחוד זר). לכן,
$|A|=|A\setminus B|+|B|$. $|A|$ אינסופית, לכן לפחות אחת מבין
$|A\setminus B|,|B|$ אינסופית. לכן, $|A|=|A\setminus B|+|B|=\max(|A\setminus B|,|B|)$.
נתון ש $|B|<|A|$, ולכן $\max(|A\setminus B|,|B|)$ אינו $|B|$ ולכן הוא $|A\setminus B|$.
לכן, $|A|=|A\setminus B|$. //

ב. הפרכה: ניקח $A=\mathbb{Z}$, $B=\mathbb{N}$.
$$|\mathbb{Z}|=\aleph_0=|\{-1,-2,..\}|=|\mathbb{Z}\setminus\mathbb{N}|$$
אך לא מתקיים $|\mathbb{Z}|>|\mathbb{N}|$ כי שניהן $\aleph_0$. //

3. נוכיח, באינדוקציה טרנספיניטית, שלכל $\alpha<\kappa$ מתקיים $0<f(\alpha)\le\frac{1}{7}$.

$\alpha=0$: $f(\alpha)=f(0)=\frac{1}{7}$, ולכן $0<f(\alpha)\le\frac{1}{7}$. ☑

יהי $0<\alpha$.
נניח נכונות הטענה לכל $\beta<\alpha$, כלומר: לכל $\beta<\alpha$ מתקיים $0<f(\beta)\le\frac{1}{7}$,
ונוכיח ש $0<f(\alpha)\le\frac{1}{7}$, כלומר שהטענה נכונה גם עבור α.
אכן, כיוון ש $0<\alpha$, $f(\alpha)=5\cdot f(h(\alpha))^3$.
$h(\alpha)\in\alpha$ (h פו' בחירה), כלומר יש $\beta<\alpha$ כך ש $h(\alpha)=\beta$.
לכן, $f(\alpha)=5f(\beta)^3$.
כיוון ש $\beta<\alpha$, מהנחת האינדוקציה לעיל, $0<f(\beta)\le\frac{1}{7}$. לכן,
$$0<\underbrace{5f(\beta)^3}_{f(\alpha)}\le 5\cdot\frac{1}{7^3}\le\frac{5}{7}\cdot\frac{1}{7^2}\le\frac{1}{7}$$
לכן, $0<f(\alpha)\le\frac{1}{7}$. ☑

ממשפט האינדוקציה, לכל $\alpha<\kappa$ מתקיים $0<f(\alpha)\le\frac{1}{7}$. //