תורת הקבוצות, 88-202

ד"ר אסף רינות

מועד ב, תשע"ד

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. נניח GCH, ו־κ, λ מונים אינסופיים המקיימים $2^\lambda = 2^\kappa$. הוכיחו כי $\kappa = \lambda$.

2. נניח $2^{\aleph_0} = \aleph_{18}$. הוכיחו כי $(\aleph_1)^{\aleph_0} = (\aleph_2)^{\aleph_0}$.

3. הגדירו את פונקציית $\aleph : O_n \to \mathrm{ICN}$, והוכיחו כי היא על.

4. הוכיחו כי לכל מונה אינסופי κ, קיים מונה λ הגדול מ־κ עבורו $\lambda < \lambda^\kappa$.

5. נניח $(L_1, <_1), (L_2, <_2)$ סדרים קוויים שלמים, צפופים, ספרביליים, ללא איבר ראשון ואחרון.
הוכיחו כי $|L_1| = |L_2|$.

6. נניח κ מונה אינסופי, ו־α סודר המקיים $0 < \alpha < \kappa$.
הוכיחו כי קיים סודר β כך ש־$|\beta| = \kappa$ ו־$\mathrm{cf}(\alpha, \in) = \mathrm{cf}(\beta, \in)$.

7. הוכיחו כי אקסימות הבחירה שקולה מעל ZF לטענה הבאה:
אם $\sim$ יחס שקילות על קבוצה לא ריקה A, אז קיימת Z המהווה קבוצת נציגים עבור $(A, \sim)$. כלומר:

1. לכל $a \in A$ קיים $z \in Z$ כך ש־ $a \sim z$.
2. לכל x, y שונים ב־ Z, $\neg(x \sim y)$.

8. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה חח"ע שומרת סדר מ־$(\aleph_1, \in)$ ל־$(\mathbb{R}, <)$.

9. נניח κ מונה אינסופי ו־$\lambda = \mathrm{cf}(\kappa, \in)$. הוכיחו כי $\kappa \not\to (\kappa)^1_\lambda$.

בהצלחה!