תורת הקבוצות, 88-202

ד"ר אסף רינות

מועד ג, תשע"ד

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. נניח κ, λ מונים סדירים אינסופיים. חשבו את $\mathrm{cf}(\lambda \cdot \kappa, \in)$, כלומר, את הקופינליות של **הסודר** $\lambda \cdot \kappa$.

2. נניח GCH. הוכיחו או הפריכו: לכל שלושה מונים אינסופיים κ, λ, θ מתקיים $\left(\kappa^{\lambda}\right)^{\theta} = \kappa^{\left(\lambda^{\theta}\right)}$.

3. הוכיחו כי קיים מונה $\kappa > \aleph_0$ כך ש- $\kappa \neq 2^{\lambda}$ לכל מונה λ.

4. נניח α סודר בן מניה. הוכיחו כי קיימת העתקה חח"ע שומרת סדר מ-$(\alpha, \in)$ לרציונליים $(\mathbb{Q}, <)$.

5. הגדירו את $\aleph : O_n \to \mathrm{ICN}$ ו-$\beth : O_n \to \mathrm{ICN}$, והוכיחו כי לכל סודר δ קיים סודר $\alpha > \delta$, כך ש-$\beth_\alpha = \aleph_\alpha$.

6. הניחו את משפט רמזי $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_2$, והוכיחו כי $\aleph_0 \to (\aleph_0)^2_n$ לכל n טבעי > 2.

7. הוכיחו (תוך שימוש מפורש באקסיומת הבחירה) כי $\aleph_1$ מונה סדיר.

8. הוכיחו כי לכל קבוצה A, קיים סודר θ כך שאין פונקציה מ-A **על** θ.

9. נניח $(P, <)$ קס"ח. הוכיחו כי קיים יחס $\lhd$ עבורו $(P, \lhd)$ סדורה קווית, ובנוסף $< \subseteq \lhd$.

בהצלחה!