שאלה 1

יהיו A,B קבוצות סדורות היטב.

א. הגדר את הסדר המילוני על $A\times B$, והוכח כי בכל קבוצה לא ריקה $C\subseteq A\times B$, יש איבר ראשון. (18 נקודות)

ב. נגדיר סדר מילוני על ${}^{\omega}\{0,1\}$: עבור $f,g\in{}^{\omega}\{0,1\}$ שונות, נאמר ש $f<g$ אם

ה n הראשון כך ש $f(n)\neq g(n)$ מקיים $f(n)<g(n)$.

האם זה סדר טוב? (18 נקודות)

תשובה:

א. הסדר המילוני ($<_{lex}$) על $A\times B$ מוגדר ע"י: לכל $(a_1,b_1),(a_2,b_2)\in A\times B$,

$(a_1,b_1)<_{lex}(a_2,b_2) \iff a_1<a_2$, או ($a_1=a_2$ ובנוסף $b_1<b_2$).

תהי $\emptyset\neq C\subseteq A\times B$. אז $\emptyset\neq\underbrace{\{a\in A:\exists b\in B,\ (a,b)\in C\}}_{C_1}\subseteq A$, ולכן יש בקבו' ($C_1$) איבר ראשון, נסמנו a_0.

כמו כן, $\emptyset\neq\underbrace{\{b\in B:(a_0,b)\in C\}}_{C_2}\subseteq B$, ולכן יש בה ($C_2$ ב) איבר ראשון.

נסמנו b_0.

אז $(a_0,b_0)\in C$, והוא ראשון בסדר $<_{lex}$: יהי $(a_0,b_0)\neq(a,b)\in C$.

<u>אפשרות א'</u>: $\underline{a_0=a}$. אז $(a_0,b)=(a,b)\in C$, ולכן $b\in C_2$.

$(a_0,b_0)\neq(a_0,b)$, לכן $b_0\neq b$. b_0 ראשון ב C_2, לכן $\underline{b_0<b}$.

לכן $(a_0,b_0)<_{lex}(a,b)$.

<u>אפשרות ב'</u>: $a_0\neq a$. כיון ש $(a,b)\in C$, $a\in C_1$ ולכן $a_0<a$ (ראשון ב C_1), ולכן $(a_0,b_0)<_{lex}(a,b)$. //

ב. זה <u>לא</u> סדר טוב: לכל n ב ω, תהי $e_n\in{}^{\omega}\{0,1\}$ הפו' המוגדרת ע"י

$$e_n(k)=\begin{cases}1 & k=n\\ 0 & k\neq n\end{cases}$$

אז לפי הסדר שהוגדר, $\dots<e_3<e_2<e_1$, ולכן אין איבר ראשון בקבוצה $\{e_n:n\in\omega\}$. //

שאלה 2

באינדוקציה על α, כל עוד הדבר אפשרי, נגדיר מספרים ממשיים x_α בצורה הבאה:

נבחר $x_0 \in (0,1)$ כלשהו. עבור סודר עוקב $\alpha+1$, אם $x_\alpha \neq 1$ נבחר $x_{\alpha+1} \in (x_\alpha, 1)$ כלשהו (ואם $x_\alpha = 1$ לא נעשה דבר, כלומר הבניה מסתיימת).

עבור α גבולי, נגדיר $x_\alpha = \sup\{x_\beta : \beta < \alpha\}$ (סופרמום של קבוצה חסומה של מספרים ממשיים).

חייב להיות סודר גבולי בן מניה α כך שהבניה מסתיימת, כלומר $x_\alpha = 1$.

א. נסח טיעון זה בצורה מדוייקת, בעזרת משפט הרקורסיה. (16 נקודות)

ב. הוכח את הטענה שבסוף הטיעון. (10 נקודות)

ג. הראה שייתכן ש $\omega < \alpha$. (10 נקודות)

תשובה: א. תהי h פו' בחירה על $P((0,1))\setminus\{\emptyset\}$. ממשפט הרקורסיה, יש פו' יחידה g שתחומה הוא הסודר $\aleph_1$, וכך שהיא מקיימת את הרקורסיה

$$g(\alpha) = \begin{cases} h((0,1)) & \alpha = 0 \\ h((g(\beta),1)) & \alpha=\beta+1,\ g(\beta)\overset{<}{\neq} 1 \\ 1 & \alpha=\beta+1,\ g(\beta)=1 \\ \sup\{g(\beta):\beta<\alpha\} & \text{גבולי } \alpha \end{cases}$$

נסמן איפוא $x_\alpha = g(\alpha)$ לכל $\alpha<\aleph_1$.

ב. נניח שלכל $\alpha<\aleph_1$, $g(\alpha)\neq 1$. מהג' g, $g(\alpha)\leq 1$ ולכן $g(\alpha)<1$ לכל $\alpha<\aleph_1$.

~~אז לכל $\beta<\aleph_1$, $g(\beta+1)=h((g(\beta),1))\in(g(\beta),1)$ ובפרט $g(\beta)<g(\beta+1)$.~~

נוכיח שהסידרה $(g(\alpha):\alpha<\aleph_1)$ עולה ממש, ואז זו סידרה עולה ממש ולא בת-מניה של ממש"ם, מה שאינו אפשרי (ראינו בתרגיל. הסיבה: לכל $\alpha<\aleph_1$ נתאים $q_\alpha\in(g(\alpha),g(\alpha+1))\cap\mathbb{Q}$. אז נקבל פו' חח"ע $\alpha\mapsto q_\alpha$ מ-$\aleph_1$ לתוך $\mathbb{Q}$, בסתירה לכך ש$|\mathbb{Q}|<\aleph_1$.)

ההוכחה: יהי $\alpha<\aleph_1$. באינדוקציה על $\beta>\alpha$, נראה ש $g(\alpha)<g(\beta)$:

$\beta=\alpha+1$: $g(\beta)=g(\alpha+1)=h((g(\alpha),1))>g(\alpha)$. ✓

$\beta>\alpha$ גבולי: $g(\beta)=\sup\{g(\gamma):\gamma<\beta\}\underset{\alpha+1<\beta}{\geq} g(\alpha+1)>g(\alpha)$. ✓

$\beta=\gamma+1$ וגם $\alpha<\gamma$: (הוכחה כמו במקרה הראשון) $g(\gamma+1)\overset{1}{>}g(\gamma)\underset{\text{הנחת האינד'}}{\geq}g(\alpha)$. ✓

ג. לכל $n\in\omega$, ייתכן שנבחר $g(n)=\frac{1}{2}-\frac{1}{n+3}$ (למשל), ואז $g(\omega)=\frac{1}{2}<1$, ולכן ה-α שבו $g(\alpha)=1$ גדול מ-ω. //

שאלה 3

בשאלה זו, "מעגל" פירושו מעגל בעל רדיוס חיובי.

יהי $\alpha < \mathfrak{c}$, ותהי $\{C_\beta : \beta < \alpha\}$ קבוצת מעגלים זרים במרחב $\mathbb{R}^3$. תהי $p \in \mathbb{R}^3$ נקודה שאינה נמצאת על אף אחד מהמעגלים הנתונים C_β ($\beta < \alpha$).

א. הוכח שיש מישור $P \subseteq \mathbb{R}^3$, כך ש $p \in P$, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $C_\beta \not\subseteq P$ (המעגל אינו מוכל במישור). (8 נקודות)

ב. הוכח שיש מעגל $C_\alpha \subseteq P$ (P הוא המישור מסעיף א'), כך ש $p \in C_\alpha$, ולכל $\beta < \alpha$ מתקיים $C_\alpha \cap C_\beta = \emptyset$. (10 נקודות)

ג. הסבר בקצרה, כיצד ניתן להשתמש בסעיף ב' כדי להראות שניתן להציג את המרחב כאיחוד של מעגלים זרים. (18 נקודות)

תשובה:

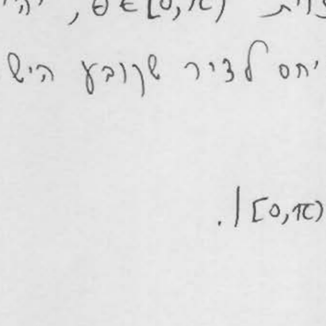
א. נקבע ישר ב $\mathbb{R}^3$ העובר דרך הנק' p, ומישור P שישר זה שייך לו. לכל זווית $\theta \in [0,\pi)$, יהי P_θ המישור המתקבל ע"י סיבוב P בזווית θ (בכיוון חיובי), ~~סביב~~ ביחס לציר שקובע הישר.

לכל $\beta<\alpha$, יש לכל היותר זווית אחת $\theta_\beta \in [0,\pi)$ כך ש $C_\beta \subseteq P_{\theta_\beta}$.

ניקח $\theta \in [0,\pi) \setminus \{\theta_\beta : \beta<\alpha\}$. יש כזה, כי $|\{\theta_\beta : \beta<\alpha\}| \le |\alpha| < c = |[0,\pi)|$.

אז לכל $\beta<\alpha$, $\theta \neq \theta_\beta$ ולכן $C_\beta \not\subseteq P$. //

ב. נקבע מישור P כמתואר בסעיף (א). לכל $\beta<\alpha$, $C_\beta \not\subseteq P$ ולכן יש לכל היותר 2 נקודות של C_β במישור P. נקבע ישר L כך ש $p \in L \subseteq P$, ונתבונן במעגלים במישור P, המשיקים ל L בנק' p:



נניח בשלילה, שלכל אחד מהמעגלים האלה יש חיתוך לא ריק עם אחד מהמעגלים C_β ($\beta<\alpha$). $p \notin C_\beta$, לכן נק' החיתוך נמצאת על $C\setminus\{p\}$.

תהי $\mathcal{A}$ קב' המעגלים המשיקים ב-p. $|\mathcal{A}|=c$, ! $|(\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta)\cap P| \le 2\cdot|\alpha| < c$

אבל לכל $C, C' \in \mathcal{A}$, $C\setminus\{p\}, C'\setminus\{p\}$ זרים וכל אחד מכיל נק' מ $P \cap (\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta)$,

לכן $c > |(\bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta)\cap P| \ge |\mathcal{A}| = c$. ↯

לכן, יש $C \in \mathcal{A}$ שאינו חותך אף C_β ($\beta<\alpha$). //

ג. נמספר את $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha : \alpha < c\}$. לכל α, נניח שכבר ~~בנינו~~ בחרנו מעגלים זרים C_β ($\beta<\alpha$) כך ש $\{p_\beta : \beta<\alpha\} \subseteq \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$. (פורמלית, נרשה ש $C_\beta = \emptyset$ עבור חלק מה-β-ים.)

אם $p_\alpha \in \bigcup_{\beta<\alpha} C_\beta$ לא נעשה דבר (נבחר $C_\alpha = \emptyset$).

אחרת, מהסעיפים הקודמים, יש מעגל C_α זר ל C_β לכל $\beta<\alpha$, כך ש $p_\alpha \in C_\alpha$.

סוף הבניה האינדוקטיבית.

קיבלנו מעגלים זרים $\{C_\alpha : \alpha < c,\ C_\alpha \neq \emptyset\}$ כך שאיחודם $\mathbb{R}^3 = \{p_\alpha : \alpha < c\} \subseteq \bigcup_{\alpha<c} C_\alpha$. //