בחינה בקורס **תורת הקבוצות** (88־202־01) - מועד ב

אוניברסיטת בר־אילן, יום ה', כ"ה תשרי תשע"ד (8.10.15)

מרצה: בועז צבאן.

מתרגל: חיים שרגא רוזנר.

משך הבחינה: שעתיים וחצי.

אין להשתמש בחומר עזר כלשהו.

הנחיות

א. השתדל לענות על כל השאלות.

השתמש במחברת הבחינה לטיוטה, ולאחר שמצאת פתרון מספק, כתוב אותו בצורה מסודרת **בגוף הבחינה**, במקום הפנוי המצוי לאחר השאלה.

אם יש צורך במקום נוסף עבור התשובה, אפשר להמשיכה בגב אותו דף.

ב. המבחן הוא בשיטת "צבור כפי יכלתך":

הניקוד הכולל לכל שאלה הוא 35 נקודות או יותר.

עד 10 נקודות בונוס יינתנו עבור סדר, נקיון, ואלגנטיות התשובות.

שאלה	**ניקוד**
1	
2	
3	
סדר ונקיון	
סה"כ	

שאלות המבחן מופיעות בעמודים הבאים.

הבהרה: גם אם הדבר לא כתוב בשאלה, עליך לנמק את תשובותיך.

בהצלחה!

שאלה 1

תהי $\mathcal{F}$ קבוצה לא ריקה של סודרים. הוכח:

(20 נק') **א.** הקבוצה $\bigcap\mathcal{F}$ היא סודר.

(15 נק') **ב.** הסודר $\alpha := \bigcap\mathcal{F}$ הוא הסודר הקטן ביותר בקבוצה $\mathcal{F}$.

(בהוכחתך, תוכל להשתמש בעובדות הבאות לפי הצורך: קבוצה $\in$־טרנזיטיבית של סודרים היא סודר. עבור סודרים: $\alpha \leq \beta \iff \alpha \subseteq \beta$. $\alpha < \beta \iff \alpha \subsetneq \beta$.)

תשובה:

שאלה 2 (35 נק')

הוכח את **משפט המכפלה:** לכל מונה אינסופי κ מתקיים $\kappa \otimes \kappa = \kappa$.

בהוכחתך, הגדר את הסדר הטוב המתאים על $\kappa \times \kappa$ (אין צורך להוכיח שהוא סדר טוב) והוכח, באינדוקציה על κ, שטיפוס הסדר הזה הוא κ.

תשובה:

שאלה 3

הקדמה לסעיף א: תהי $(r_\alpha : \alpha < \beta)$ סידרה מאורך β של מספרים ממשיים. נאמר שהסידרה **עולה ממש** אם לכל $\alpha_1 < \alpha_2 < \beta$ מתקיים $r_{\alpha_1} < r_{\alpha_2}$. בדומה, נגדיר סידרה **יורדת ממש**.

(20 נק') **א.** הוכח שאם $(r_\alpha : \alpha < \beta)$ היא סידרה עולה ממש של מספרים ממשיים, אז $\beta < \aleph_1$, כלומר הסידרה היא בת מניה.

הקדמה לסעיף ב: **צביעה** של (אברי) קבוצה A ב 2 צבעים היא פוקנציה $f: A \to \{0,1\}$. (אנו מזהים את 2 הצבעים עם המספרים $0,1$, ואז $f(a) = k$ פירושו "צובעים את האיבר a בצבע k").

נאמר שקבוצה $M \subseteq A$ היא **מונוכרומטית** עבור צביעה כזאת אם לכל אברי M אותו צבע, כלומר: יש $i \in \{0,1\}$ כך ש $\{f(x) : x \in M\} = \{i\}$.

(20 נק') **ב.** נסמן $[\mathbb{R}]^2 = \{\{x,y\} : x,y \in \mathbb{R},\, x \neq y\}$. נגדיר צביעה של אברי הקבוצה $[\mathbb{R}]^2$ בשני צבעים, בצורה הבאה:

תהי $\mathbb{R} = \{r_\alpha : \alpha < \mathfrak{c}\}$ (מניה חד־חד ערכית). לכל שני סודרים $\alpha < \beta$, נצבע את האיבר $\{r_\alpha, r_\beta\}$ בצבע 0 אם $r_\alpha < r_\beta$, ובצבע 1 אחרת.

תהי $X \subseteq \mathbb{R}$ קבוצה כך שהקבוצה $[X]^2$ היא מונוכרומטית עבור הצביעה שהגדרנו. הוכח שהקבוצה X היא בת מניה.

תשובה: