

תורת הקבוצות, 88-202

ד"ר אסף רינות, גב' תמר נחשוני  
מועד א, תשע"ו

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. הדגימו קיומם של סודרים  $\alpha, \beta, \gamma$  שונים מ-0 כך ששני הבאים מתקיימים בו-זמנית:

1.  $\alpha \neq \beta$ ,

2.  $\alpha \cdot \gamma = \beta \cdot \gamma$ .

2. הגדירו את  $\aleph : \text{On} \rightarrow \text{ICN}$  ו- $\beth : \text{On} \rightarrow \text{ICN}$ , והוכיחו כי לכל סודר  $\alpha$  קיים סודר  $\beta < \alpha$  כך ש- $\aleph_\beta = \beth_\alpha$ .

3. הוכיחו כי  $\aleph_{\aleph_0} \neq \beth_1$ .

4. נניח GCH. הוכיחו כי אם  $\lambda, \kappa$  מונים המקיימים  $2^\lambda = 2^\kappa$ , אז  $\lambda = \kappa$ .

5. נניח כי  $(L, \leq)$  קבוצה סדורה קווית. הוכיחו כי  $\text{cf}(L, \leq)$  מונה סדיר.

6. נניח  $\alpha$  סודר אינסופי. נסמן ב- $H(\alpha)$  את מספר הרטוגס של  $\alpha$ . הוכיחו כי  $H(\alpha) = |\alpha|^+$ .

7. הוכיחו כי עקרון הסדר הטוב שקול (מעל ZF) לאקסיומת הבחירה.

8. נניח  $I$  אידיאל. הוכיחו כי לכל  $S \in I^+$  ו- $C \in \hat{I}$ , מתקיים  $S \cap C \in I^+$ .

9. לקבוצת סודרים  $A$ , נסמן ב- $\pi_A$  את העתקת האיזומורפיזם מ- $(\text{otp}(A, \epsilon), \epsilon)$  ל- $(A, \epsilon)$ :

$$\pi_A : \text{otp}(A, \epsilon) \leftrightarrow A$$

הוכיחו כי קבוצה  $A$  היא סל"ח ב- $\omega_1$  אם ורק אם  $\pi_A : \omega_1 \rightarrow \omega_1$  פונקציה נורמלית.

בהצלחה!