

תורת הקבוצות, 88-202

פרופ' אסף רינות, גב' תמר בר-און

מועד ב', תשע"ח

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. נניח $\aleph_2 = 2^{2^{\aleph_0}}$. הוכיחו כי $\aleph_1 = (\aleph_1)^{\aleph_0}$.

2. הוכיחו כי לא קיים מונה κ המקיים $2^\kappa = \aleph_\omega$.

3. נניח $0 < \alpha < \beta_1 < \beta_2$ סודרים. הוכיחו כי $\alpha \cdot \beta_1 < \alpha \cdot \beta_2$.

4. נניח C סל"ח ב- ω_1 ו- S שבת ב- ω_1 . הוכיחו כי $S \cap C$ שבת ב- ω_1 .

5. נניח κ מונה גבולי חזק. הוכיחו כי לכל $\lambda, \mu, \kappa > \mu$, מתקיים $\mu^\lambda < \kappa$.

6. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה חח"ע הופכת סדר מ- (ω_1, \in) ל- $(\mathbb{R}, <)$.

7. נניח $(A, <)$ קבוצה סדורה היטב, ו- $f: A \rightarrow A$ העתקה שומרת סדר.

הוכיחו כי לכל $a \in A$ מתקיים $a = f(a)$ או $a < f(a)$.

8. הוכיחו כי קיים סודר גבולי α כך ש- $\{|\alpha \setminus \beta| \mid \beta < \alpha\}$ מכילה בדיוק 4 איברים.

9. הוכיחו כי הבאים שקולים:

א. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.

ב. לכל שתי קבוצות לא ריקות X, Y לפחות אחד מהבאים מתקיים:

• קיימת $f: X \rightarrow Y$ חד-חד-ערכית.

• קיימת $f: Y \rightarrow X$ חד-חד-ערכית.

בהצלחה!