

גאומטריה אנליטית ודיפרנציאלית 88-202 מבחן מועד א' סמסטר ב' תשע"ג

משך המבחן: שלוש שעות. כל חומר עזר מותר בשימוש (כולל מחשבון).
ענו על 4 מ-5 השאלות הבאות. סמנו בבירור על איזו שאלה אתם עונים והקיפו תשובות סופיות.

1. נתון מיפוי כלשהו $r: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$.

(א) הוכיחו כי מטריצת המטריקה g חיובית לחלוטין.

(ב) בטאו את g_{12} באמצעות הביטויים $\frac{\partial r^i}{\partial w^j}$.

2. עקומים ב- \mathbb{R}^2 :

(א) נתון העקום $\gamma = (\sin kt, \cos nt)$ עבור k, n טבעיים (ושוניים מ-0). מה התנאי על k ו- n כך שהעקום יהיה רגולרי.

(ב) מהו העקום המתואר (בחלקו) ע"י $\gamma = (\sin 2t, \cos t)$? (רמז: מצאו את הקשר בין x ל- y)

(ג) מהו עקמומיות העקום $\gamma = (\sin 2t, \cos t)$ (כפונקציה של t)?

3. נתון ההיפרבולואיד $(\cosh v \cos \theta, \cosh v \sin \theta, \sinh v)$.

(א) חשבו את התבנית היסודית הראשונה.

(ב) חשבו את מקדמי כריסטופל.

(ג) הוכיחו כי המעגל $x^2 + y^2 = 1$ במישור $z = 0$ הוא קו גאודזי על פני ההיפרבולואיד.

4. תהי α עקומה פרמטרית, הנתונה ע"י

$$\alpha(t) = \left(\frac{1}{\sqrt{3}} \cos t + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t, \frac{1}{\sqrt{3}} \cos t - \frac{1}{\sqrt{2}} \sin t \right)$$

(א) מצאו פרמטריזציה טבעית, $\alpha(s)$ עבור העקומה.

(ב) חשבו את העקמומיות והפיתול של $\alpha(s)$.

(ג) חשבו את אורך העקומה $\alpha(t)$ בטווח הפרמטר $0 \leq t \leq 2\pi$.

5. יהי $M \subseteq \mathbb{R}^3$ המשטח הנתון ע"י המשוואה $z = xy$.

- (א) מצאו פרמטריזציה רגולרית, $r(u, v)$ עבור M .
- (ב) חשבו את התבנית היסודית הראשונה.
- (ג) רשמו את המשוואות הגאודזיות עבור הקואורדינטות u, v (אין צורך לפתור אותן).

בהצלחה