

תורת הקבוצות, 88-202

פרופ' אסף רינות, מר רועי שלו

תש"פ, סמסטר א', מועד א'

משך המבחן: 3 שעות.

אין להשתמש בכל חומר עזר מכל סוג שהוא.

יש לענות על כל השאלות. משקל כל שאלה: 15 נקודות.

ציון מבחן מקסימלי: 100 נקודות.

1. הדגימו קיומם של שלושה סודרים שונים α, β, γ עבורם $(\alpha + \beta) \cdot \gamma \neq \alpha \cdot \gamma + \beta \cdot \gamma$.
2. הגדירו את פונקציית $\text{ICN} : \text{On} \rightarrow \text{ICN}$, והוכיחו כי היא על.
3. נניח (L, \trianglelefteq) קבוצה סדורה קווית בת-מניה שאיננה ריקה. נסמן ב- \leq את הסידור הרגיל של קבוצת המספרים הרציונליים \mathbb{Q} . הוכיחו כי קס"ח המכפלה $(\mathbb{Q}, \leq) \times (L, \trianglelefteq)$ איזומורפי-סדר ל- (\mathbb{Q}, \leq) .
4. הוכיחו כי קיים סודר גבולי α כך ש- $\{|\alpha \setminus \beta| \mid \beta < \alpha\}$ מכילה בדיוק 4 איברים.
5. נניח S קבוצה שבת ב- ω_1 . הוכיחו כי קיים $S \ni \alpha$ כך ש- $\omega^\alpha = \alpha$.
6. הוכיחו כי לא קיימת פונקציה חח"ע הופכת סדר מ- (ω_1, \in) ל- $(\mathbb{R}, <)$.
7. נניח GCH. הוכיחו כי אם κ, λ מונים המקיימים $2^\kappa = 2^\lambda$, אז $\kappa = \lambda$.
8. נניח λ, κ מונים סדירים אינסופיים. חשבו את $\text{cf}(\lambda \cdot \kappa, \in)$, כלומר, את הקופינליות של הסודר $\lambda \cdot \kappa$.
9. הוכיחו כי הבאים שקולים מעל ZF:
 - א. עקרון הסדר הטוב של צרמלו.
 - ב. לכל שתי קבוצות לא ריקות X, Y לפחות אחד מהבאים מתקיים:
 - קיימת $f : X \rightarrow Y$ חד-חד-ערכית.
 - קיימת $f : Y \rightarrow X$ חד-חד-ערכית.

בהצלחה!